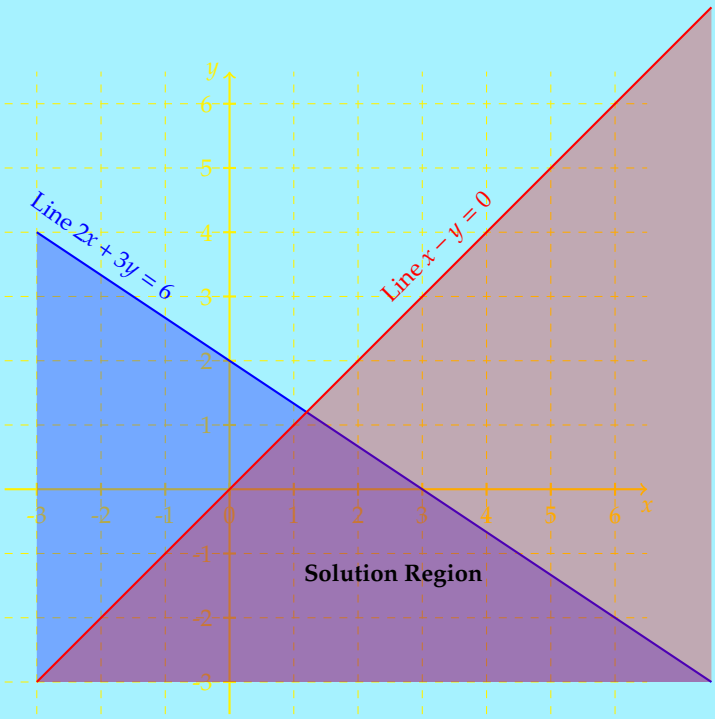
MOSTAFA ZAHRI

Equations and Inequalities

Artificial Intelligence Assisted Solutions, Hints, and Tips for CALCULUS
Bridge to the University

المعادلات والمتباينات

ملخصات وأسئلة معدة بالذكاء الاصطناعي للتفاضل والتكامل
جسر للجامعة



Version 1
SHARJAH–2024

Preface

This Pre-Calculus book, **Equations and Inequalities**, marks a significant step forward in integrating artificial intelligence into educational resources. Created with up to 50% assistance from AI, it leverages advanced tools to provide a wealth of solved exercises, illustrative examples, and insightful tips that make understanding equations and inequalities accessible and engaging for learners at all levels.

The structured layout of the book, combined with its vast array of graphics, aims to demystify complex mathematical concepts through clear, visual explanations. Readers are guided through progressive levels of problem-solving, with hints provided to foster independent thinking and a deep comprehension of each topic. This book is designed to meet the needs of school, college, and first-year university students in science, engineering, business, and other majors. Offering comprehensive coverage and practical guidance provides a solid foundation for students from various fields to develop essential mathematical skills.

This approach enhances traditional learning methods and embraces a modern paradigm where AI is an invaluable partner in education. The book empowers learners to build strong mathematical foundations, adapt to new problem-solving techniques, and gain confidence in tackling challenging questions by offering step-by-step solutions and strategies. We hope that **Equations and Inequalities** inspires readers to explore mathematics with curiosity and determination and appreciate technology's evolving role in transforming how we learn and teach.

Mostafa ZAHRI
Sharjah 2024

تـمـهـيـد

يـمثل هذا الكتاب مقدمة لحساب التفاضل والتكامل والمسمى **المـعـادلات والـمـتـبـايـنـات** ، خطوة مهمة نحو دمج الذكاء الاصطناعي في الموارد التعليمية. أُنجز هذا العمل بمساعدة الذكاء الاصطناعي بنسبة تصل إلى 50% ، ويستفيد من الأدوات المتقدمة لتقديم ثروة من التمارين المحلولة، والأمثلة التوضيحية، والنصائح القيمة التي تجعل فهم المعادلات والمتباينات في متناول المتعلمين على جميع المستويات.

تم تصميم هذا الكتاب لتلبية احتياجات طلاب الثانوي والكليات التقنية وطلاب الجامعة في السنة الأولى في مجالات العلوم والهندسة والأعمال والتخصصات الأخرى ذات الصلة. من خلال تغطيته الشاملة وتوجيهاته العملية، يوفر الكتاب أساسًا قويًا للطلاب من مختلف المجالات الذين يطورون مهارات رياضية أساسية.

تم تصميم الكتاب بشكل منهجي، ويدعمه عدد كبير من الرسوم البيانية بهدف تبسيط المفاهيم الرياضية المعقدة من خلال شروحات مرئية واضحة. ويصحب القراء عبر مستويات متدرجة من حل المشكلات، مع توفير تلميحات لتشجيع التفكير المستقل وتعزيز الفهم العميق لكل موضوع.

لا يعزز هذا النهج الأساليب التقليدية في التعلم فحسب، بل يتبنى أيضًا نموذجًا حديثًا حيث يلعب الذكاء الاصطناعي دور الشريك الأساسي في التعليم. من خلال تقديم حلول واستراتيجيات خطوة بخطوة، يتيح الكتاب للمتعلمين بناء أساسات رياضية قوية، والتكيف مع تقنيات حل المشكلات الحديثة، واكتساب الثقة في مواجهة الأسئلة الصعبة.

نأمل أن يلهم هذا الكتاب، **المـعـادلات والـمـتـبـايـنـات** ، القراء لاستكشاف عالم الرياضيات بشغف وإصرار، وتقدير الدور المتنامي للتكنولوجيا في تحويل كيفية التعلم والتعليم.

مـصـطـفـى زهـري
الشـارقـة 2024

Equations and Inequalities

Artificial Intelligence Assisted Solutions, Hints, and Tips
Bridge to the University
Version 1
Sharjah 2024

Mostafa ZAHRI, Professor of Applied Mathematics, Sharjah University,
Sharjah, United Arab Emirates

Any remark or suggestion please send your email to the author:
zahri.mostafa@gmail.com

For the carefully revising this manuscript, I wish to thank my Students:
Ahmad H. M. Abu Saleh
Fatema N. Al Zeada
Israa A. G. Mohamed
Ayah A. S. Alkhodari
Maryam Faisal
Ghozlan Mohammed

Copyright

© 2024 Mostafa ZAHRI *All rights reserved. This book, Equations and Inequalities, is provided for personal use only. Readers are permitted to use and print this book for individual, non-commercial purposes. Commercial printing, distribution, or reproduction of this book, in part or in full, is strictly prohibited without the express written permission of the author. For permission requests or inquiries, please contact the author directly.*

CONTENTS

1 Linear Equations and Inequalities **7**

1 Linear Equations 7

1.1.1 Standard linear equations 7

1.1.2 Exercises on Standard Linear Equations 8

1.1.3 Linear equations involving the absolute value 15

1.1.4 Exercises on linear equations involving the absolute value . 17

1.1.5 Non-standard from of linear equations 21

1.1.6 Exercises on linear equations in non-standard form 23

2 Linear Inequalities 25

1.2.1 Linear Inequalities in Standard form 25

1.2.2 Example of Graphing an Inequality on the Real Line 26

1.2.3 Exercises on Linear Inequalities in Standard form 28

1.2.4 Linear Inequalities involving the absolute value 31

1.2.5 Exercises on Linear inequalities involving the absolute value 33

1.2.6 Linear inequalities in non-standard form 36

1.2.7 Exercises on Linear inequalities in non-standard form 38

2 Non-Linear Equations and Inequalities **41**

1 Quadratic Equations 41

2.1.1 Short review on Quadratic Equation and Quadratic Function 41

2.1.2 Exercises 43

2 Quadratic Inequalities 55

2.2.1 Summary how to solve Quadratic Inequalities 55

2.2.2 Exercises 55

3 Cubic Equations 65

2.3.1 Tips for solving Cubic Equations 65

2.3.2 Cardano's formula 65

2.3.3 Exercises for Cubic Equations 67

3 Expressions involving Lines and Polynomials **71**
1 Line Equations . . . 71
3.1.1 Short Review of Line equations . . . 71
3.1.2 Exercises about Line Equations . . . 75
2 Polynomials and their properties . . . 82
3.2.1 Properties of polynomials . . . 82
3.2.2 Polynomial Graphs by Degree . . . 83
3.2.3 Exercises on polynomials . . . 84
3 Factoring of polynomials . . . 91
3.3.1 Tips related to Factoring of polynomials . . . 91
3.3.2 Exercises . . . 92
4 Completing the Square . . . 100
3.4.1 How to use completing square . . . 100
3.4.2 Exercises . . . 100
5 Finding the Equation of the Conic . . . 107
3.5.1 Equations of Conic Sections . . . 107
3.5.2 Exercises . . . 110

4 Equations involving Radical, Logarithms and Exponentials **118**
1 Radical Equations . . . 118
4.1.1 Tips for Radical . . . 118
4.1.2 Exercises . . . 119
2 Exponential and Logarithmic Equations . . . 122
4.2.1 Tips for Exponential Equations . . . 122
4.2.2 Tips for Logarithmic Equations . . . 123
4.2.3 General Tips . . . 124
4.2.4 Exercises with solutions . . . 125

5 Linear Systems of Equations and Inequalities **134**
1 Linear Systems of Equations in two variables . . . 134
5.1.1 Review Tips for Solving Linear Systems of Equations . . . 134
5.1.2 Exercises for Substitution Method . . . 137
5.1.3 Exercises for Elimination Method . . . 139
5.1.4 Special cases of linear systems . . . 143
5.1.5 Choosing the appropriate Method . . . 144
2 Inequalities in xy-plane . . . 147
5.2.1 General tips for finding the Intersection of Two Linear Inequalities . . . 147
5.2.2 Relevant Cases of Systems of Inequalities in the Plane . . . 148
5.2.3 Exercises . . . 154

6 Next Book: Functions in one variable **159**
Glossary . . . 163

Chapter 1

Linear Equations and Inequalities

1.1. Linear Equations

1.1.1 Standard linear equations

Solving an Equation in the Form $mx + b = 0$
For a linear equation: $mx + b = 0$ isolate x by moving b to the other side and then dividing by m: $x = -\frac{b}{m}$ **Cases:**
1. **Unique Solution:** If $m \neq 0$, the equation has a unique solution: $x = -\frac{b}{m}$.
2. **All Real Numbers:** If $m = 0$ and $b = 0$, the equation becomes $0 = 0$, which is always true. Hence, the solution set is: $\mathbb{1R}$.
3. **Empty Solution Set:** If $m = 0$ and $b \neq 0$, the equation becomes $0 = b$, which is a contradiction. Hence, the solution set is: $\emptyset$.

حل معادلة من الشكل $mx + b = 0$. في معادلة خطية مثل: $mx + b = 0$. قم بعزل x عن طريق نقل b للطرف الآخر، ثم قسمة على m : $x = -\frac{b}{m}$. **الحالات:**
1. **حل وحيد:** إذا كان $m \neq 0$ ، فإن للمعادلة حل وحيد: $x = -\frac{b}{m}$.
2. **كل الأعداد الحقيقية:** إذا كان $m = 0$ و $b = 0$ ، تصبح المعادلة $0 = 0$ ، والتي تكون صحيحة دائمًا. وبالتالي، فإن مجموعة الحلول هي: $\mathbb{R}$.
3. **مجموعة الحلول فارغة:** إذا كان $m = 0$ و $b \neq 0$ ، تصبح المعادلة $0 = b$ ، وهي تناقض. وبالتالي، فإن مجموعة الحلول هي: $\emptyset$.

Example 1.1.1 (Unique Solution).

Solve the linear equation: $2x + 5 = 15$.

Solution Rearrange the equation to find x:

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 15 && \textit{isolate } x \\ 2x &= 15 - 5 && \textit{subtract from both sides } -5 \\ 2x &= 10 && \textit{divide both sides over } 2 \\ x &= \frac{10}{2} = 5. && \textit{this is the solution} \end{aligned}$$

The solution set contains $x = 5$ only.

Example 1.1.2 (All Real Numbers).

Solve the linear equation: $3y - 6 = 3(y - 2)$.

Solution Simplify both sides:

$$\begin{aligned} 3y - 6 &= 3y - 6 && \textit{expand } 3(y-2) \\ 0 &= 0 && \textit{subtract } 3y-6 \textit{ from both sides} \end{aligned}$$

Since this equation is always true, the solution set is all real numbers: $\mathbb{R}$.

Example 1.1.3 (Empty Set).

Solve the linear equation: $2z + 3 = 2z - 5$.

Solution Simplify and rearrange the equation:

$$\begin{aligned} 2z + 3 &= 2z - 5 && \textit{isolate } z \\ 2z - 2z &= -5 - 3 && \textit{subtract } 2z \textit{ from both sides} \\ 0 &= -8. && \textit{this is a contradiction} \end{aligned}$$

Since the equation leads to a contradiction, the solution set is empty: $\emptyset$.

1.1.2 Exercises on Standard Linear Equations

Question 1.1.1. Find the root of the equation $2x - 4 = 0$.
A) -2
B) 2
C) 0
D) x
E) None of these choices

Answer: B) 2
To find the root of a linear equation, set $2x - 4 = 0$ and solve for x.

لإيجاد جذر المعادلة الخطية، نضع $2x - 4 = 0$ ونحل لإيجاد x.

Question 1.1.2. Find the root of the equation $3x + 5 = 0$.
A) $-\frac{5}{3}$
B) $\frac{5}{3}$

C) -5
D) 3
E) None of these choices

Answer: A) $-\frac{5}{3}$
To find the root, set $3x + 5 = 0$ and solve for x.

لإيجاد الجذر، نضع $3x + 5 = 0$ ونحل لإيجاد x .

Question 1.1.3. Find the root of the equation $x - 7 = 0$.
A) 7
B) -7
C) 0
D) 1
E) None of these choices

Answer: A) 7
The root is simply $x = 7$ when $x - 7 = 0$.

الجذر ببساطة هو $x = 7$ عندما $x - 7 = 0$.

Question 1.1.4. Find the root of the equation $4x + 12 = 0$.
A) -4
B) 3
C) -3
D) 0
E) None of these choices

Answer: C) -3
Solve $4x + 12 = 0$ by isolating x.

نحل $4x + 12 = 0$ بعزل x .

Question 1.1.5. Find the root of the equation $5x - 15 = 0$.
A) 0
B) -3
C) 5
D) 3
E) None of these choices

Answer: D) 3
Solve $5x - 15 = 0$ by isolating x.

الجواب: D) 3
نحل $5x - 15 = 0$ بعزل x .

Question 1.1.6. Find the root of the equation $x + 9 = 0$.
A) 9
B) -9
C) 0
D) 1
E) None of these choices

Answer: B) -9
The root is $x = -9$ when $x + 9 = 0$.

الجواب: B) -9
الجذر هو $x = -9$ عندما $x + 9 = 0$.

Question 1.1.7. Find the root of the equation $6x + 18 = 0$.
A) 3
B) -3
C) 6
D) 0
E) None of these choices

Answer: B) 3
Solve $6x + 18 = 0$ by isolating x.

الجواب: B) 3
نحل $6x - 18 = 0$ بعزل x .

Question 1.1.8. Find the root of the equation $-2x + 8 = 0$.
A) 4
B) -4
C) 2
D) 0
E) None of these choices

Answer: A) 4
Solve $-2x + 8 = 0$ by isolating x.

الجواب: A) 4
نحل $-2x + 8 = 0$ بعزل x .

Question 1.1.9. Find the root of the equation $x + 4 = 0$.
A) 4
B) -4

C) 0
D) 1
E) None of these choices

Answer: B) −4
The root is $x = -4$ when $x + 4 = 0$.

الجذر هو $x = -4$ عندما $x + 4 = 0$.

Question 1.1.10. Find the root of the equation $7x - 21 = 0$.
A) 3
B) −3
C) 7
D) 0
E) None of these choices

Answer: A) 3
Solve $7x - 21 = 0$ by isolating x.

نحل $7x - 21 = 0$ بعزل x .

Question 1.1.11. Find the root of the equation $\frac{2}{x} + 3 = 0$.
A) $-\frac{2}{3}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $-\frac{3}{2}$
D) −2
E) None of these choices

Answer: A) −2/3
First, subtract 3 from both sides: $\frac{2}{x} = -3$.
Next, multiply both sides by x: $2 = -3x$.
Finally, divide both sides by −3: $x = -\frac{2}{3}$.

نطرح 3 من كلا الطرفين: $\frac{2}{x} = -3$.
نضرب كلا الطرفين في x : $2 = -3x$.
نقسم الطرفين على −3 : $x = -\frac{2}{3}$.

Question 1.1.12. Find the root of the equation $\frac{5}{x} - 4 = 0$.
A) $\frac{4}{5}$
B) 5
C) $\frac{5}{4}$
D) 1
E) None of these choices

Answer: C) $\frac{5}{4}$
First, add 4 to both sides:
$\frac{5}{x} = 4$.
Next, multiply both sides by x:
$5 = 4x$.
Finally, divide both sides by 4:
$x = \frac{5}{4}$.

نضيف 4 إلى كلا الطرفين: $\frac{5}{x} = 4$.
نضرب كلا الطرفين في x : $5 = 4x$.
نقسم الطرفين على 4 : $x = \frac{5}{4}$.

Question 1.1.13. Find the root of the equation $\frac{7}{x} + 2 = 0$.
A) -2
B) $-\frac{7}{2}$
C) 2
D) 0
E) None of these choices

Answer: B) $-\frac{7}{2}$
First, subtract 2 from both sides:
$\frac{7}{x} = -2$.
Next, multiply both sides by x:
$7 = -2x$.
Finally, divide both sides by -2:
$x = -\frac{7}{2}$.

نطرح 2 من كلا الطرفين: $\frac{7}{x} = -2$.
نضرب كلا الطرفين في x : $7 = -2x$.
نقسم الطرفين على -2 : $x = -\frac{7}{2}$.

Question 1.1.14. Find the root of the equation $\frac{4}{x} - 1 = 0$.
A) $\frac{4}{3}$
B) 4
C) -4
D) $\frac{1}{4}$
E) None of these choices

Answer: B) 4
First, add 1 to both sides:
$\frac{4}{x} = 1$.
Next, multiply both sides by x:
$4 = x$.
The root is $x = 4$.

نضيف 1 إلى كلا الطرفين: $\frac{4}{x} = 1$.
نضرب كلا الطرفين في x : $4 = x$.
الجذر هو $x = 4$.

Question 1.1.15. Find the root of the equation $\frac{9}{x} + 5 = 0$.
A) $\frac{9}{5}$

B) $-\frac{9}{5}$
C) 9
D) -9
E) None of these choices

Answer: B) $-\frac{9}{5}$
First, subtract 5 from both sides:
$\frac{9}{x} = -5$.
Next, multiply both sides by x:
$9 = -5x$.
Finally, divide both sides by -5:
$x = -\frac{9}{5}$.

نطرح 5 من كلا الطرفين: $\frac{9}{x} = -5$.
نضرب كلا الطرفين في x : $9 = -5x$.
نقسم الطرفين على -5 : $x = -\frac{9}{5}$.

Question 1.1.16. Solve the equation $2x + 3 = 2x - 5$. Does it have a solution?
A) $x = 1$
B) $x = -1$
C) No solution
D) Infinitely many solutions
E) None of these choices

Answer: C) No solution
Subtract $2x$ from both sides:
$3 = -5$, which is a contradiction.
Since the equation results in a false statement, there is no solution.

نطرح $2x$ من كلا الطرفين:
$3 = -5$ ، وهذا تناقض.
بما أن المعادلة تنتج عبارة خاطئة، فلا يوجد حل.

Question 1.1.17. Solve the equation $3x - 4 = 3(x - \frac{4}{3})$. Does it have a solution?
A) $x = 1$
B) $x = 0$
C) No solution
D) Infinitely many solutions
E) None of these choices

Answer: D) Infinitely many solutions
Simplify the right-hand side:
$3x - 4 = 3x - 4$.
Both sides of the equation are identical, so the equation holds true for all x. This means there are infinitely many solutions.

نبسط الطرف الأيمن:
$3x - 4 = 3x - 4$.
كلا الطرفين متماثلان، لذا فإن المعادلة صحيحة لجميع قيم x
. وهذا يعني أن هناك عدد لا نهائي من الحلول.

Question 1.1.18. Solve the equation $4(x+1) = 4x + 10$. Does it have a solution?
A) $x = 1$
B) $x = 0$
C) No solution
D) Infinitely many solutions
E) None of these choices

Answer: C) No solution
Expand both sides:
$4x + 4 = 4x + 10$.
Subtract $4x$ from both sides:
$4 = 10$, which is a contradiction. Therefore, there is no solution.

نوسع كلا الطرفين:
$4x + 4 = 4x + 10$.
نطرح $4x$ من كلا الطرفين:
$4 = 10$ ، وهذا تناقض. لذلك، لا يوجد حل.

Question 1.1.19. Solve the equation $5x + 2 = 5(x + \frac{2}{5})$. Does it have a solution?
A) $x = 2$
B) $x = -2$
C) No solution
D) Infinitely many solutions
E) None of these choices

Answer: D) Infinitely many solutions
Simplify the right-hand side:
$5x + 2 = 5x + 2$.
Both sides are the same, so the equation is true for all values of x. This means there are infinitely many solutions.

نبسط الطرف الأيمن:
$5x + 2 = 5x + 2$.
كلا الطرفين متماثلان، لذا فإن المعادلة صحيحة لجميع قيم x
. وهذا يعني أن هناك عدد لا نهائي من الحلول.

1.1.3 Linear equations involving the absolute value

Solving an Equation in the Form $|ax+b|=c$
For an equation with absolute value: $|ax+b|=c$, solve by considering two cases:
case (1). $ax+b=c$. *case* (2). $ax+b=-c$.
Steps:
1. **Isolate the absolute value:** Ensure the equation is of the form $|ax+b|=c$, with $c \geq 0$.
2. **Split into two linear equations:** Solve $ax+b=c$ and $ax+b=-c$.
3. **Solve each equation:** For each equation, isolate x using linear solving techniques: $x=\frac{c-b}{a}$ and $x=\frac{-c-b}{a}$. 1. **Check for no solutions:** If $c<0$, the equation has no solution ($\emptyset$).
Solution Types:
1. **Two Solutions:** If $c>0$, the equation has two solutions: $x=\frac{c-b}{a}$ and $x=\frac{-c-b}{a}$. 2. **One Solution:** If $c=0$, the equation simplifies to $ax+b=0$, which has one solution: $x=-\frac{b}{a}$. 3. **No Solution:** If $c<0$, the equation is invalid, and the solution set is $\emptyset$.

حل معادلة من الشكل $|ax+b|=c$
لحل معادلة ذات قيمة مطلقة: $|ax+b|=c$ ، يجب النظر إلى حالتين:
الحالة (1). $ax+b=c$. الحالة (2). $ax+b=-c$.
الخطوات:
1. **عزل القيمة المطلقة:** تأكد أن المعادلة من الشكل $|ax+b|=c$ ، بحيث $c \geq 0$.
2. **تقسيم المعادلة:** حل $ax+b=c$ و $ax+b=-c$.
3. **حل كل معادلة:** قم بعزل x باستخدام طرق حل المعادلات الخطية: $x=\frac{c-b}{a}$ و $x=\frac{-c-b}{a}$. 4. **التحقق من الحلول:** إذا كان $c<0$ ، فإن المعادلة ليس لها حلول ($\emptyset$).
أنواع الحلول:
1. **حلّان:** إذا كان $c>0$ ، فإن المعادلة لها حلّان: $x=\frac{c-b}{a}$ و $x=\frac{-c-b}{a}$. 2. **حل وحيد:** إذا كان $c=0$ ، فإن المعادلة تصبح $ax+b=0$ ، ولها حل وحيد: $x=-\frac{b}{a}$. 3. **لا حلول:** إذا كان $c<0$ ، فإن المعادلة غير ممكنة، وبالتالي مجموعة الحلول هي $\emptyset$.

Example 1.1.4 (Two Solutions).

Solve the linear equation involving absolute value: $|2x-4|=6$.

Solution Split into two cases and solve each:

$$\begin{aligned} \text{Case 1: } & 2x-4=6 && \textit{remove the absolute value} \\ & 2x=10 && \textit{add 4 to both sides} \\ & x=5 && \textit{divide by 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Case 2: } & 2x-4=-6 && \textit{negate the right-hand side} \\ & 2x=-2 && \textit{add 4 to both sides} \\ & x=-1 && \textit{divide by 2} \end{aligned}$$

Thus, the solution set is $\{-1,5\}$.

Example 1.1.5 (No Solutions).

Solve the linear equation involving absolute value: $|x+3|=-2$.

Solution Since the absolute value cannot be negative, the equation has no solution. The solution set is $\emptyset$.

Example 1.1.6 (One Solution)**.**

Solve the linear equation involving absolute value: $|5x - 10| = 0$.

Solution The absolute value is zero only when the expression inside equals zero:

$$\begin{aligned} 5x - 10 &= 0 && \textit{set the expression to 0} \\ 5x &= 10 && \textit{add 10 to both sides} \\ x &= 2 && \textit{divide by 5} \end{aligned}$$

Thus, the solution is $x = 2$.

Example 1.1.7 (All Real Numbers)**.**

Solve the linear equation: $|0x + 0| = 0$.

Solution Simplify the equation:

$$0 = 0 \quad \textit{the equation holds true for any } x$$

Since this equation is always true, the solution set is all real numbers: $\mathbb{R}$.

Example 1.1.8 (Special Case: No Solutions Due to Isolation)**.**

Solve the linear equation involving absolute value: $|3x - 6| + 2 = 0$.

Solution Isolate the absolute value:

$$|3x - 6| = -2 \quad \textit{subtract 2 from both sides}$$

Since the absolute value cannot be negative, the equation has no solution. The solution set is $\emptyset$.

Example 1.1.9 (Special Case: Multiple Steps to Solve)**.**

Solve the linear equation involving absolute value: $|4x + 5| = 7$.

Solution Split into two cases and solve each:

$$\begin{aligned}
\text{Case 1: } & 4x+5=7 && \textit{remove the absolute value}\\
& 4x=2 && \textit{subtract 5 from both sides}\\
& x=\frac{1}{2} && \textit{divide by 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Case 2: } & 4x+5=-7 && \textit{negate the right-hand side}\\
& 4x=-12 && \textit{subtract 5 from both sides}\\
& x=-3 && \textit{divide by 4}
\end{aligned}$$

Thus, the solution set is $\{-3, \frac{1}{2}\}$.

1.1.4 Exercises on linear equations involving the absolute value

Question 1.1.20. Solve the equation $|x-3|=5$.

A) $x=8$ or $x=-2$

B) $x=3$ or $x=-3$

C) $x=5$

D) $x=-5$

E) None of these choices

Answer: A) $x=8$ or $x=-2$

Since $|x-3|=5$, this means $x-3=5$ or $x-3=-5$.

Solving both cases:

(1). $x-3=5 \Rightarrow x=8$.

(2). $x-3=-5 \Rightarrow x=-2$.

بما أن $|x-3|=5$ ، فهذا يعني أن $x-3=5$ أو $x-3=-5$.

نحل الحالتين:

(1). $x-3=5 \Rightarrow x=8$.

(2). $x-3=-5 \Rightarrow x=-2$.

Question 1.1.21. Solve the equation $|x+4|=-3$. Does it have a solution?

A) $x=-4$

B) $x=3$

C) No solution

D) $x=-3$

E) None of these choices

Answer: C) No solution

There is no solution because the absolute value function cannot equal a negative number.

The equation $|x+4|=-3$ is impossible to solve.

لا يوجد حل لأن دالة القيمة المطلقة لا يمكن أن تساوي عددًا سالبًا.

المعادلة $|x+4|=-3$ غير قابلة للحل.

Question 1.1.22. Solve the equation $|2x - 4| = 0$.

A) $x = 0$

B) $x = 2$

C) $x = 4$

D) No solution

E) None of these choices

Answer: B) $x = 2$

Since $|2x - 4| = 0$, this means $2x - 4 = 0$.

Solving for x:

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

بما أن $|2x - 4| = 0$ ، فهذا يعني أن $2x - 4 = 0$.

نحل لإيجاد x :

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Question 1.1.23. Solve the equation $|3x + 2| = 7$.

A) $x = \frac{5}{3}$ or $x = -3$

B) $x = 3$

C) $x = 0$

D) $x = -2$

E) None of these choices

Answer: A) $x = \frac{5}{3}$ or $x = -3$

Since $|3x + 2| = 7$, this means $3x + 2 = 7$ or $3x + 2 = -7$.

Solving both cases:

(1) $3x + 2 = 7 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

(2) $3x + 2 = -7 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$.

بما أن $|3x + 2| = 7$ ، فهذا يعني أن $3x + 2 = 7$ أو $3x + 2 = -7$.

نحل الحالتين:

$3x + 2 = 7 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (1)

$3x + 2 = -7 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$ (2)

Question 1.1.24. Solve the equation $|x - 6| = 4$.

A) $x = 10$ or $x = 2$

B) $x = 6$ or $x = -6$

C) $x = 4$

D) $x = -4$

E) None of these choices

Answer: A) $x = 10$ or $x = 2$

Since $|x - 6| = 4$, this means $x - 6 = 4$ or $x - 6 = -4$.

Solving both cases:

1) $x - 6 = 4 \Rightarrow x = 10$.

2) $x - 6 = -4 \Rightarrow x = 2$.

بما أن $|x - 6| = 4$ ، فهذا يعني أن $x - 6 = 4$ أو $x - 6 = -4$.

نحل الحالتين:

. 1) $x - 6 = 4 \Rightarrow x = 10$

. 2) $x - 6 = -4 \Rightarrow x = 2$

Question 1.1.25. Solve the equation $|2x+1| = -3$. Does it have a solution?
A) $x = -1$
B) $x = 3$
C) No solution
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) No solution
There is no solution because the absolute value of any expression cannot be negative.
Since $|2x+1| = -3$, and absolute value cannot be negative, the equation has no solution.

لا يوجد حل لأن دالة القيمة المطلقة لأي تعبير لا يمكن أن تكون سلبية.
بما أن $|2x+1| = -3$ والقيمة المطلقة لا يمكن أن تكون سالبة، فالمعادلة ليس لها حل.

Question 1.1.26. Solve the equation $|x-4| = -2$. Does it have a solution?
A) $x = 2$
B) $x = 4$
C) No solution
D) $x = -4$
E) None of these choices

Answer: C) No solution
There is no solution because absolute values cannot be negative.
Since $|x-4| = -2$, the equation has no solution.

لا يوجد حل لأن القيم المطلقة لا يمكن أن تكون سالبة.
بما أن $|x-4| = -2$ فالمعادلة ليس لها حل.

Question 1.1.27. Solve the equation $|x-2| = |2-x|$. Does it have a solution?
A) No solution
B) Infinitely many solutions
C) $x = 2$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: B) Infinitely many solutions
Since both sides of the equation are identical, $|x-2| = |2-x|$, the equation holds true for all x.
Therefore, there are infinitely many solutions.

بما أن طرفي المعادلة متماثلان $|x-2| = |2-x|$ فإن المعادلة صحيحة لكل قيم x .
لذلك، هناك عدد لا نهائي من الحلول.

Question 1.1.28. Solve the equation $|2x+3| = |2x+3|$. Does it have a solution?
A) No solution

B) Infinitely many solutions
C) $x = -3$
D) $x = 2$
E) None of these choices

Answer: B) Infinitely many solutions
Since both sides of the equation are identical, $|2x + 3| = |2x + 3|$, the equation holds true for all values of x.
Thus, there are infinitely many solutions.

بما أن طرفي المعادلة متماثلان، $|2x + 3| = |2x + 3|$ ، فإن المعادلة صحيحة لكل قيم x .
لذلك، هناك عدد لا نهائي من الحلول.

Question 1.1.29. Solve the equation $|3x - 1| = -4$. Does it have a solution?
A) No solution
B) $x = -1$
C) $x = 0$
D) $x = 4$
E) None of these choices

Answer: A) No solution
There is no solution because the absolute value of any expression cannot equal a negative number.
Since $|3x - 1| = -4$, this equation has no solution.

لا يوجد حل لأن القيمة المطلقة لأي تعبير لا يمكن أن تساوي عددًا سالبًا.
بما أن $|3x - 1| = -4$ ،فالمعادلة ليس لها حل.

1.1.5 Non-standard from of linear equations

Solving an Equation of the Form $\frac{a}{x-b} = \frac{c}{x-d}$

To solve the equation of the form $\frac{a}{x-b} = \frac{c}{x-d}$, follow these steps:

1. **Cross-multiply:** Multiply both sides by $(x-b)(x-d)$ to eliminate the denominators:
$$a(x-d) = c(x-b).$$
2. **Expand both sides:** Distribute a and c on both sides:
$$ax - ad = cx - cb.$$
3. **Isolate x:** Rearrange the terms to bring all terms with x on one side:
$$ax - cx = ad - cb.$$
Factor out x:
$$x(a-c) = ad - cb.$$
4. **Solve for x:** Divide both sides by $(a-c)$ (if $a \neq c$):
$$x = \frac{ad-cb}{a-c}.$$
5. **Check for restrictions:** Ensure $x \neq b$ and $x \neq d$, as these would make the original equation undefined.

حل معادلة من الشكل $\frac{a}{x-b} = \frac{c}{x-d}$

لحل معادلة من الشكل $\frac{a}{x-b} = \frac{c}{x-d}$ ، اتبع الخطوات التالية:

1. **الضرب التبادلي:** اضرب الطرفين في $(x-b)(x-d)$ للتخلص من المقامات:
$$a(x-d) = c(x-b).$$
2. **تبسيط الطرفين:** وزع a و c على كلا الطرفين:
$$ax - ad = cx - cb.$$
3. **عزل x :** أعد ترتيب الحدود لجمع كل الحدود التي تحتوي على x في طرف واحد:
$$ax - cx = ad - cb.$$
ثم أخرج x كعامل مشترك:
$$x(a-c) = ad - cb.$$
4. **حل المعادلة بالنسبة لـ x :** اقسم كلا الطرفين على $(a-c)$ (إذا كان $a \neq c$):
$$x = \frac{ad-cb}{a-c}.$$
5. **التحقق من القيود:** تأكد أن $x \neq b$ و $x \neq d$ ، لأن هذه القيم تجعل المعادلة الأصلية غير معرفة.

Example 1.1.10 (Equation: Multiple Steps to Solve)**.**

Solve the linear equation written in nonstandard form: $\frac{3}{x-2} = \frac{5}{2x-3}$.

Solution Eliminate the denominators by cross-multiplying:

$$\begin{aligned} 3(2x-3) &= 5(x-2) && \textit{cross-multiply to remove fractions} \\ 6x-9 &= 5x-10 && \textit{expand both sides} \\ x &= -1 && \textit{subtract } 5x \textit{ and add } 9 \textit{ to isolate } x \end{aligned}$$

Check for restrictions:

$$x \neq 2 \quad \text{and} \quad x \neq \frac{3}{2} \qquad \textit{denominators cannot be zero}$$

Since $x = -1$ does not violate the restrictions, the solution is: $x = -1$.

Example 1.1.11 (Special Case: No Solution).

Solve the linear equation written in nonstandard form: $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Solution Simplify both sides:

$$\begin{aligned} x+1 &= x+2 && \textit{denominators are identical, so simplify numerators} \\ 1 &= 2 && \textit{subtract } x \textit{ from both sides (contradiction)} \end{aligned}$$

Since this is a contradiction, the equation has no solution. The solution set is: $\emptyset$.

Example 1.1.12 (Special Case: Multiple Steps to Solve).

Solve the linear equation written in nonstandard form: $\dfrac{4}{x+1} = \dfrac{2}{x-3}$.

Solution Eliminate the denominators by cross-multiplying:

$$\begin{aligned} 4(x-3) &= 2(x+1) && \textit{cross-multiply to remove fractions} \\ 4x-12 &= 2x+2 && \textit{expand both sides} \\ 2x &= 14 && \textit{subtract } 2x \textit{ and add } 12 \\ x &= 7 && \textit{divide by } 2 \end{aligned}$$

Check for restrictions:

$$x \neq -1 \quad \text{and} \quad x \neq 3 \qquad \textit{denominators cannot be zero}$$

Since $x = 7$ does not violate the restrictions, the solution is: $x = 7$.

Example 1.1.13 (Special Case: Multiple Steps with Restrictions).

Solve the linear equation written in nonstandard form: $\dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{6}{x+3}$.

Solution Eliminate the denominators by cross-multiplying:

$$\begin{aligned} 2x(x+3) &= 6(x+3) && \textit{cross-multiply to remove fractions} \\ 2x &= 6 && \textit{divide both sides by } x+3 \textit{ (valid since } x \neq -3\textit{)} \\ x &= 3 && \textit{solve for } x \end{aligned}$$

Check for restrictions:

$$x \neq -3 \qquad \textit{denominator cannot be zero}$$

Since $x = 3$ satisfies the restrictions, the solution is: $x = 3$.

Example 1.1.14 (Special Case: Multiple Steps to Solve).

Solve the linear equation written in nonstandard form: $\frac{2x}{x+3} = \frac{-6}{x+3}$.

Solution Eliminate the denominators by multiplying through by $x+3$:

$$2x = -6 \quad \textit{cancel the common denominator (valid if } x \neq -3\textit{)}$$
$$x = -3 \quad \textit{divide by 2 to solve for } x$$

Check for restrictions:

$$x \neq -3 \quad \textit{denominator cannot be zero}$$

Since $x = -3$ violates the restriction, the equation has no solution. The solution set is: $\emptyset$.

1.1.6 Exercises on linear equations in non-standard form

Question 1.1.30. Solve the equation $\frac{3}{x-5} = \frac{7}{1-x}$.

A) $x = -3.8$
B) $x = 5$
C) No solution
D) $x = 3.8$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 3.8$
Using cross-multiplication: $3(1-x) = 7(x-5)$. Simplify: $3-3x = 7x-35$. Combine like terms: $38 = 10x$. Solve for x: $x = \frac{38}{10} = 3.8$. Verification shows the solution satisfies the original equation.

باستخدام الضرب التبادلي: $3(1-x) = 7(x-5)$. تفكيك الاقواس. $3-3x = 7x-35$. بجمع الحدود المتشابهة: $38 = 10x$. نحل لـ x : $x = \frac{38}{10} = 3.8$. التحقق يظهر أن الحل يحقق المعادلة الأصلية.

Question 1.1.31. Solve the equation $d\frac{2}{x+3} + 5 = \frac{3}{x+3}$.

A) $x = -14/5$
B) $x = -3$
C) No solution
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: A) $x = -14/5$

Combine terms with the same denominator:

$$\frac{2}{x+3} + 5 = \frac{3}{x+3}.$$

Subtract $\frac{2}{x+3}$ from both sides:

$$5 = \frac{3-2}{x+3}.$$

Simplify:

$$5 = \frac{1}{x+3}.$$

Multiply through by $x+3$ (valid as long as $x \neq -3$):

$$5(x+3) = 1.$$

Simplify:

$$5x + 15 = 1.$$

Solve for x:

$$5x = -14, \quad x = -\frac{14}{5}.$$

Verification confirms that $x = -14/5$ satisfies the original equation.

بدمج الحدود ذات المقام المشترك:

$$\frac{2}{x+3} + 5 = \frac{3}{x+3}.$$

نطرح $\frac{2}{x+3}$ من كلا الجانبين:

$$5 = \frac{3-2}{x+3}.$$

نبسط:

$$5 = \frac{1}{x+3}.$$

نضرب في $x+3$ (بشرط أن $x \neq -3$):

$$5(x+3) = 1.$$

التبسيط يعطي:

$$5x + 15 = 1.$$

نحل لـ x :

$$5x = -14, \quad x = -\frac{14}{5}.$$

التحقق يؤكد أن $x = -14/5$ يحقق المعادلة الأصلية.

Question 1.1.32. Solve the equation $\dfrac{x+2}{x-4} = \dfrac{2-x}{x-4}$.

A) $x = 4$

B) $x = -2$

C) No solution

D) $x = 0$

E) None of these choices

Answer: D) No solution

Simplifying $x-4$ leads to $x+2 = 2-x$ and therefore $x = 0$. Since $0 \neq 4$, this equation has $x = 0$ as solution.

باستخدام الضرب التبادلي: $x+2 = 2-x$ وبالتالي $x = 0$
وبما ان الحل $x = 0$ لا يساوي 4 فان الحل هو $x = 0$.

Question 1.1.33. Solve the equation $\dfrac{3x+2}{x-1} = \dfrac{5}{x-1}$.

A) $x = 1$

B) $x = -1$

C) $x = 2$

D) No solution

E) None of these choices

Answer: D) No solution
The denominator $x-1$ cannot be zero, excluding $x=1$. Simplifying gives $3x+2=5$, leading to $x=1$. However, this contradicts the excluded value $x=1$.

لا يمكن أن يكون $x+1=0$ ، وبالتالي $x=1$ مستبعد. التبسيط يعطي $3x+2=5$ أي $x=1$ ، وهذا يتناقض مع القيم المستبعدة.

Question 1.1.34. Solve the equation $\frac{5x}{x-2}=\frac{10}{x-2}$.
A) $x=2$
B) $x=0$
C) No solution
D) $x=5$
E) None of these choices

Answer: C) No solution
The equation $\frac{5x}{x-2}=\frac{10}{x-2}$ has a restriction that $x\neq 2$ because the denominator $x-2$ cannot be zero. Eliminating the denominator gives: $5x=10$. Solving for x, we find: $x=2$ However, this value is excluded due to the restriction $x\neq 2$. Thus, the equation has no solution.

المعادلة $\frac{5x}{x-2}=\frac{10}{x-2}$ لها شرط أن $x\neq 2$ لأن المقام $x-2$ لا يمكن أن يساوي صفرًا. إزالة المقام يعطي: $5x=10$ بحل هذه المعادلة، نجد: $x=2$ ولكن هذه القيمة مستبعدة بسبب الشرط $x\neq 2$ لذلك، المعادلة ليس لها حل.

1.2. Linear Inequalities

1.2.1 Linear Inequalities in Standard form

Solving linear inequalities of the form $ax+b\leq c$ is similar to solving linear equations, with a few additional considerations. Here are some tips to keep in mind:

Isolate the Variable: Start by isolating the variable on one side of the inequality. For example, in $3x+5>11$, subtract 5 from both sides to get $3x>6$, then divide by 3 to find $x>2$.
عزل المتغير: ابدأ بعزل المتغير على أحد طرفي المتباينة. على سبيل المثال، في $3x+5>11$ ، قم بطرح 5 من كلا الطرفين للحصول على $3x>6$ ، ثم قسم على 3 للحصول على $x>2$.

Reverse the Inequality for Negative Multiplications/Divisions: If you multiply or divide both sides of the inequality by a negative number, reverse the inequality symbol. For instance: $-2x<6\Rightarrow x>-3$.
عكس رمز المتباينة عند الضرب أو القسمة على عدد سالب: إذا قمت بضرب أو قسمة طرفي المتباينة على عدد سالب، فعليك عكس رمز المتباينة. على سبيل المثال: $-2x<6\Rightarrow x>-3$.

Graph the Solution on the Real Line: After solving the inequality, represent the solution on the real line. Use an open circle for strict inequalities (e.g., $x > 2$ or $x < -1$) and a closed circle for inclusive inequalities (e.g., $x \geq 2$ or $x \leq -1$).
رسم الحل على خط الأعداد الحقيقية: بعد حل المتباينة، قم بتمثيل الحل على خط الأعداد الحقيقية. استخدم دائرة مفتوحة للمتباينات الصارمة (مثل $x > 2$ أو $x < -1$) ودائرة مغلقة للمتباينات الشاملة (مثل $x \geq 2$ أو $x \leq -1$).

Express Solution in Interval Notation: Linear inequalities are often written in interval notation. For example, if $x > 2$, the solution in interval notation is $(2, \infty)$. For $x \geq -1$, the interval notation is $[-1, \infty)$.
كتابة الحل بصيغة الفترات: غالبًا ما تُكتب حلول المتباينات الخطية بصيغة الفترات. على سبيل المثال، إذا كان $x > 2$ ، فإن الحل بصيغة الفترات هو $(2, \infty)$. أما إذا كان $x \geq -1$ ، فإن الحل بصيغة الفترات هو $[-1, \infty)$.

Check with a Test Point (Optional): If uncertain, select a test point from each side of the inequality to confirm the solution region. For instance, for $x < 3$, testing $x = 2$ should satisfy the inequality, confirming $(-\infty, 3)$ as the solution.
التحقق باستخدام نقطة اختبار (اختياري): إذا كنت غير متأكد، اختر نقطة اختبار من كل جانب من جوانب المتباينة للتأكد من منطقة الحل. على سبيل المثال، بالنسبة إلى $x < 3$ ،فإن اختبار $x = 2$ يجب أن يحقق المتباينة، مما يؤكد أن $(-\infty, 3)$ هو الحل.

Compound Inequalities: When solving compound inequalities, like $a < x < b$, treat each part separately and then combine the results. For example, in $-1 < 2x < 5$, first solve $-1 < 2x$ and $2x < 5$, then intersect the solution sets to get $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$.
المتباينات المركبة: عند حل المتباينات المركبة مثل $a < x < b$ ، قم بحل كل جزء على حدة ثم قم بدمج النتائج. على سبيل المثال، في $-1 < 2x < 5$ ، قم أولاً بحل $-1 < 2x$ و $2x < 5$، ثم تقاطع مجموعتي الحلول للحصول على $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$.

1.2.2 Example of Graphing an Inequality on the Real Line

Example 1.2.15.

Sketch this one-side inequality on the real line: $x > 2$.

Solution In this graph:

- The open circle at $x = 2$ represents that x is strictly greater than 2.
- The arrow to the right shows the values of x that satisfy $x > 2$ equivalent to $(2, \infty)$.

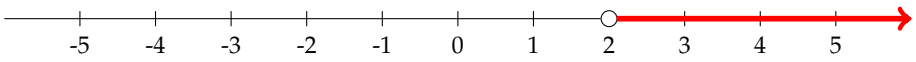


Figure 1.1: Representation of the open interval $(2, \infty)$ on the real line

Example 1.2.16.

Sketch this one-sides inequality on the real line: $x \leq 3$.

Solution In this graph:

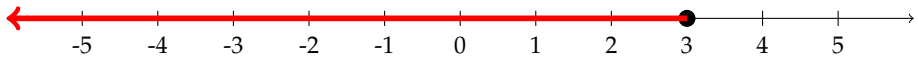


Figure 1.2: Representation of the semi-open interval $(\infty, 3]$ on the real line

- The closed circle at $x = 3$ represents that x is less than or equal to 3.
- The dashed arrow to the left shows the values of x that satisfy $x \leq 3$ equivalent to $(-\infty, 3]$.

Example 1.2.17.

Sketch this two-sides inequality on the real line: $-3 < x \leq 4$.

Solution In this graph:

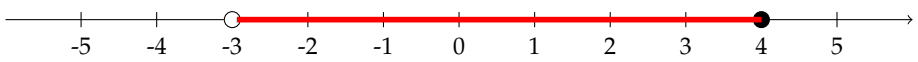


Figure 1.3: Representation of the open interval $(-\infty, 3]$ on the real line

- The open circle at $x = -3$ represents that x is strictly greater than -3 (i.e., $-3 < x$).
- The closed circle at $x = 4$ represents that x is less than or equal to 4 (i.e., $x \leq 4$).
- The solid line segment between $x = -3$ and $x = 4$ shows all values of x that satisfy $-3 < x \leq 4$ equivalent to $(-3, 4]$.

Example 1.2.18.

Solve the inequality and sketch the solution on the real line: $-4 < x - 3 < 4$.

Solution **Step 1: Understand the Absolute Value Inequality** The two sides inequality $-4 < x - 3 < 4$ means the distance between x and 3 is less than 4 on the number line.
Step 2: Solve for x Solve the double inequality step by step:

$$\text{Add 3 to all sides:} \quad -4+3 < x-3+3 < 4+3 \implies \quad -1 < x < 7$$

Step 3: Interpret the Solution The solution is all values of x between -1 and 7, not including the endpoints. In interval notation: $x \in (-1, 7)$
Step 4: Verify the Solution Test values within and outside the interval:

- Pick $x = 0$ (inside): $-4 < 0 - 3 < 4$, which is satisfied.

The solution is: $x \in (-1, 7)$.

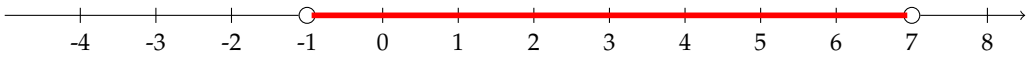


Figure 1.4: Representation of the open interval $(-1, 7)$ on the real line

1.2.3 Exercises on Linear Inequalities in Standard form

Question 1.2.35. Find the solution set of the inequality $2x - 4 \leq 0$.
A) $(-\infty, 2)$
B) $(-\infty, 2]$
C) $(-\infty, -2]$
D) $(-\infty, -2)$
E) None of these choices

Answer: B) $(-\infty, 2]$
To find the root of a linear inequality, set $2x - 4 = 0$ and solve for x:
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = 2$
The inequality $2x - 4 \leq 0$ holds for all $x \leq 2$, so the solution set is $(-\infty, 2]$.

لإيجاد جذر المتباينة الخطية، نضع $2x - 4 = 0$ ونحل
لإيجاد x :
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = 2$
المتباينة $2x - 4 \leq 0$ تتحقق لكل $x \leq 2$ ، وبالتالي مجموعة الحل هي $(-\infty, 2]$.

Question 1.2.36. Find the solution set of the inequality $3x + 5 > 8$.
A) $(-\infty, 1]$
B) $(1, \infty)$
C) $(-\infty, 1)$
D) $[1, \infty)$
E) None of these choices

Answer: B) $(1, \infty)$
Set $3x + 5 = 8$ and solve for x:
$3x = 3$
$x = 1$
The inequality $3x + 5 > 8$ holds for $x > 1$, so the solution set is $(1, \infty)$.

لإيجاد مجموعة الحل، نضع $3x + 5 = 8$ ونحل لإيجاد x :
$3x = 3$
$x = 1$
المتباينة $3x + 5 > 8$ تتحقق لكل $x > 1$ ، وبالتالي مجموعة الحل هي $(1, \infty)$.

Question 1.2.37. Solve the inequality $4x - 3 \leq x + 5$.
A) $(-\infty, 8/3]$
B) $(-\infty, 8/3)$
C) $(8/3, \infty)$
D) $[8/3, \infty)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, 8/3]$
Rewrite as $3x \leq 8$ and solve for x:
$x \leq \frac{8}{3}$
Solution set: $(-\infty, 8/3]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $3x \leq 8$ ونحل لإيجاد x :
$x \leq \frac{8}{3}$
مجموعة الحل هي $(-\infty, 8/3]$.

Question 1.2.38. Determine the solution set of $-2x + 7 < 3$.
A) $(-\infty, 2]$
B) $[2, \infty)$
C) $(2, \infty)$
D) $(-\infty, 2)$
E) None of these choices

Answer: C) $(2, \infty)$
Rewrite as $-2x < -4$ and solve:
$x > 2$
Solution set: $(2, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $-2x < -4$ ونحل:
$x > 2$
مجموعة الحل هي $(2, \infty)$.

Question 1.2.39. Determine the solution for $|x + 2| \leq 5$.
A) $[-7, 3]$
B) $(-7, 3)$
C) $[-3, 7]$
D) $(-3, 7)$
E) None of these choices

Answer: A) $[-7,3]$
Rewrite as $-5 \le x+2 \le 5$, solve for x:
$[-7,3]$

نعيد الكتابة كالتالي $-5 \le x+2 \le 5$ ، و نحل لإيجاد x :
$[-7,3]$

Question 1.2.40. Find the solution set of $3 - x > 2x + 1$.
A) $(-\infty, 2/3]$
B) $(-\infty, 2/3)$
C) $(-\infty, -2/3]$
D) $(2/3, \infty)$
E) None of these choices

Answer: B) $(-\infty, 2/3)$
Rewrite as $-3x < -2$:
$x < 2/3$

نعيد الكتابة كالتالي $-3x < -2$:
$x < 2/3$

Question 1.2.41. Solve for x if $|x - 4| > 3$.
A) $(1, \infty)$
B) $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$
C) $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$
D) $(4, 7)$
E) None of these choices

Answer: B) $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$
Rewrite as $x > 7$ or $x < 1$.

نعيد الكتابة كالتالي $x > 7$ أو $x < 1$.

Question 1.2.42. Solve the inequality $5 - 2x < 3$.
A) $(1, \infty)$
B) $(-\infty, 2]$
C) $(-\infty, 1)$
D) $(1, 2)$
E) None of these choices

Answer: A) $(1, \infty)$
Rewrite as $-2x < -2$:
$x > 1$

نعيد الكتابة كالتالي $-2x < -2$:
$x > 1$

Question 1.2.43. Solve the inequality $3 < 2x + 1 \le 7$.
A) $(1, 3]$
B) $[1, 3)$

C) $(1,3]$
D) $[2,4]$
E) None of these choices

Answer: A) $(1,3]$
Break the inequality into two parts and solve each:
1. $3 < 2x+1$
$\Rightarrow 2x > 2$
$\Rightarrow x > 1$
2. $2x+1 \leq 7$
$\Rightarrow 2x \leq 6$
$\Rightarrow x \leq 3$
Combining these, we get $1 < x \leq 3$, or $(1,3]$.

نحل المتباينة بجزئين و نحل كل جزء على حدة:
1 . $3 < 2x+1$
$\Rightarrow 2x > 2$
$\Rightarrow x > 1$
2 . $2x+1 \leq 7$
$\Rightarrow 2x \leq 6$
$\Rightarrow x \leq 3$
بدمج النتيجتين، نحصل على $1 < x \leq 3$ ، أي $(1,3]$.

Question 1.2.44. Find the solution set of $-4 \leq 3x-1 < 5$.
A) $(-1,2]$
B) $[-1,2)$
C) $(-1,2)$
D) $[0,2]$
E) None of these choices

Answer: B) $[-1,2)$
Separate into two inequalities and solve:
1. $-4 \leq 3x-1$
$\Rightarrow 3x \geq -3$
$\Rightarrow x \geq -1$
2. $3x-1 < 5$
$\Rightarrow 3x < 6$
$\Rightarrow x < 2$
Solution set: $[-1,2)$.

نحلل المتباينة إلى جزأين و نحل كل جزء:
1 . $-4 \leq 3x-1$
$\Rightarrow 3x \geq -3$
$\Rightarrow x \geq -1$
2 . $3x-1 < 5$
$\Rightarrow 3x < 6$
$\Rightarrow x < 2$
مجموعة الحل هي $[-1,2)$.

1.2.4 Linear Inequalities involving the absolute value

Understand the Definition of Absolute Value: Recall that the absolute value of a number represents its distance from zero. For an inequality like $|x| < a$, it implies $-a < x < a$, and for $|x| > a$, it implies $x < -a$ or $x > a$.
فهم تعريف القيمة المطلقة: تذكر أن القيمة المطلقة لعدد تمثل بعده عن الصفر. على سبيل المثال، إذا كانت المتباينة $|x| < a$ ، فهذا يعني $-a < x < a$ ، وإذا كانت $|x| > a$ ، فهذا يعني $x < -a$ أو $x > a$.

Isolate the Absolute Value Expression: Make sure the absolute value is by itself on one side of the inequality. For example, in $|2x+3| \leq 7$, the absolute value is already isolated.

عزل تعبير القيمة المطلقة: تأكد من أن تعبير القيمة المطلقة يكون منفردًا على أحد طرفي المتباينة. على سبيل المثال، في $|2x+3| \leq 7$ ، فإن القيمة المطلقة معزولة بالفعل.

Rewrite the Inequality Without Absolute Value: Depending on the type of inequality:

- For $|x| < a$: Rewrite as $-a < x < a$.
- For $|x| > a$: Rewrite as $x < -a$ or $x > a$.

For example, $|2x+3| \leq 7$ becomes $-7 \leq 2x+3 \leq 7$.

إعادة كتابة المتباينة بدون القيمة المطلقة: بناءً على نوع المتباينة:

- إذا كانت $|x| < a$ إعادة كتابة المتباينة على شكل $-a < x < a$.
- إذا كانت $|x| > a$ إعادة كتابة المتباينة على شكل $x < -a$ أو $x > a$.

على سبيل المثال، تصبح المتباينة $|2x+3| \leq 7$ كالتالي $-7 \leq 2x+3 \leq 7$.

Solve the Resulting Compound Inequality: Break the compound inequality into two parts and solve. For example, $-7 \leq 2x+3 \leq 7$ becomes: $-7 \leq 2x+3$ and $2x+3 \leq 7$. Solving these gives $-5 \leq x \leq 2$.

حل المتباينة المركبة الناتجة:

قم بتقسيم المتباينة المركبة إلى جزئين وحل كل منهما. على سبيل المثال، تصبح المتباينة $-7 \leq 2x+3 \leq 7$ على شكل متباينتين $-7 \leq 2x+3$ و $2x+3 \leq 7$ بحل هذه المتباينات، نحصل على $-5 \leq x \leq 2$.

Graph the Solution (Optional): Represent the solution on the number line. Use closed circles for inclusive inequalities ($\leq, \geq$) and open circles for strict inequalities ($<, >$).

رسم الحل (اختياري): قم بتمثيل الحل على خط الأعداد. استخدم دوائر مغلقة للمتباينات الشاملة ($\leq, \geq$) ودوائر مفتوحة للمتباينات الصارمة ($<, >$). كما هو مبين من خلال الامثلة اعلاه.

Example 1.2.19.

Solve the inequality $|x-3| < 4$ and sketch the solution on the real line.

Solution

Step 1: Understand the Absolute Value Inequality The inequality $|x-3| < 4$ means the distance between x and 3 is less than 4 on the number line.

Step 2: Rewrite Without the Absolute Value To remove the absolute value, rewrite the inequality as a double inequality: $-4 < x-3 < 4$.

Step 3: Solve for x Solve the double inequality step by step:

$$\text{Add 3 to all sides:} \quad -4+3 < x-3+3 < 4+3 \quad \Longrightarrow \quad -1 < x < 7.$$

Step 4: Interpret the Solution The solution is all values of x between -1 and 7, not including the endpoints. In interval notation: $x \in (-1, 7)$.
Step 5: Verify the Solution Test values within and outside the interval:

- Pick $x = 0$ (inside): $|0 - 3| = 3$, which satisfies $|x - 3| < 4$.
- Pick $x = -2$ (outside): $|-2 - 3| = 5$, which does not satisfy $|x - 3| < 4$.

Final Answer: The solution is: $x \in (-1, 7)$.

Figure 1.5: Representation of the open interval $(-1, 7)$ on the real line

Example 1.2.20.

Solve the inequality $|x - 3| \geq 3$ and sketch the solution on the real line.

Solution
Step 1: Understand the Absolute Value Inequality The inequality $|x - 3| \geq 3$ means that the distance between x and 3 on the number line is at least 3.
Step 2: Rewrite Without Absolute Value The inequality $|x - 3| \geq 3$ can be rewritten as two separate inequalities: $x - 3 \leq -3 \quad \text{or} \quad x - 3 \geq 3$.
Step 3: Solve Each Inequality
1. Solve $x - 3 \leq -3$: $x \leq 0$.
2. Solve $x - 3 \geq 3$: $x \geq 6$.
Step 4: Combine the Solutions The solution is the union of $x \leq 0$ and $x \geq 6$. In interval notation: $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$.
Step 5: Sketch the Solution on the Real Line Below is the graphical representation of the solution. The solution is: $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$.

Figure 1.6: Representation of the union $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ on the real line

1.2.5 Exercises on Linear inequalities involving the absolute value

Question 1.2.45. Solve the absolute value inequality $|2x - 3| \leq 5$.
A) $[-1, 4]$
B) $(-1, 4)$
C) $(1, 5]$
D) $(-5, 5)$

E) None of these choices

Answer: A) $[-1,4]$
Rewrite as $-5 \le 2x-3 \le 5$ and solve:
1. $-5 \le 2x-3$
$\Rightarrow 2x \ge -2$
$\Rightarrow x \ge -1$
2. $2x-3 \le 5$
$\Rightarrow 2x \le 8$
$\Rightarrow x \le 4$
Combining, we get $x \in [-1,4]$.

نحل المتباينة بإعادة كتابتها كالتالي $-5 \le 2x-3 \le 5$
و نحل:
1 . $-5 \le 2x-3$
$\Rightarrow 2x \ge -2$
$\Rightarrow x \ge -1$
2 . $2x-3 \le 5$
$\Rightarrow 2x \le 8$
$\Rightarrow x \le 4$
بدمج النتيجتين، نحصل على $x \in [-1,4]$.

Question 1.2.46. Determine the solution set of $|x+2| > 3$.
A) $(-\infty,-5) \cup (1,\infty)$
B) $(-\infty,-5] \cup [1,\infty)$
C) $(-\infty,-1) \cup (5,\infty)$
D) $(-5,-1)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty,-5) \cup (1,\infty)$
Rewrite as two inequalities:
1. $x+2 > 3 \Rightarrow x > 1$
2. $x+2 < -3 \Rightarrow x < -5$
Solution: $x \in (-\infty,-5) \cup (1,\infty)$.

نحل المتباينة كالتالي:
1 . $x+2 > 3 \Rightarrow x > 1$
2 . $x+2 < -3 \Rightarrow x < -5$
مجموعة الحل هي $x \in (-\infty,-5) \cup (1,\infty)$.

Question 1.2.47. Find the solution set of $|3x-4| \ge 2$.
A) $(-\infty, 2/3] \cup [2,\infty)$
B) $(-\infty, 4/3] \cup [1,\infty)$
C) $(0,3)$
D) $[0,3]$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, 2/3] \cup [2,\infty)$
Rewrite as two inequalities:
1. $3x-4 \ge 2 \Rightarrow x \ge 2$
2. $3x-4 \le -2 \Rightarrow x \le \frac{2}{3}$
Solution: $x \in (-\infty, 2/3] \cup [2,\infty)$.

نحل المتباينة كالتالي:
1 . $3x-4 \ge 2 \Rightarrow x \ge 2$
2 . $3x-4 \le -2 \Rightarrow x \le \frac{2}{3}$
مجموعة الحل هي $x \in (-\infty, 2/3] \cup [2,\infty)$.

Question 1.2.48. Solve the inequality $2x+5 < 2x-3$.
A) $(-\infty,\infty)$

B) $\emptyset$
C) $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: B) $\emptyset$
Subtract $2x$ from both sides:
$5 < -3$
Since this is a contradiction, there is no solution. Solution set: $\emptyset$.

نطرح $2x$ من كلا الطرفين:
$5 < -3$
لأن هذا تناقض، لا يوجد حل. مجموعة الحل هي $\emptyset$.

Question 1.2.49. Find the solution set of the inequality $|3x + 1| \geq -2$.
A) $(-\infty, \infty)$
B) $\emptyset$
C) $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, \infty)$
Since the absolute value is always non-negative, it is always greater than or equal to -2. Thus, the solution is all real numbers: $(-\infty, \infty)$.

بما أن القيمة المطلقة دائماً غير سالبة، فهي دائماً أكبر من أو تساوي -2 . وبالتالي، مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$.

Question 1.2.50. Solve the inequality $4x - 7 \geq 4x + 2$.
A) $(-\infty, \infty)$
B) $\emptyset$
C) $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: B) $\emptyset$
Subtract $4x$ from both sides:
$-7 \geq 2$
Since this is a contradiction, the inequality has no solution. Solution set: $\emptyset$.

نطرح $4x$ من كلا الطرفين:
$-7 \geq 2$
بما أن هذا تناقض، فالمتباينة ليس لها حل. مجموعة الحل هي $\emptyset$.

Question 1.2.51. Determine the solution set of $|5x - 2| < -1$.
A) $(-\infty, \infty)$
B) $\emptyset$
C) $(0, \infty)$

D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: B) $\emptyset$
Absolute values are always non-negative, so they cannot be less than -1. Therefore, the solution set is $\emptyset$.

القيم المطلقة دائماً غير سالبة، لذلك لا يمكن أن تكون أقل من -1 . وبالتالي، مجموعة الحل هي $\emptyset$.

Question 1.2.52. Solve the inequality $|x-3| \leq 0$.
A) $(-\infty, \infty)$
B) $\{3\}$
C) $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: B) $\{3\}$
The absolute value is zero only if $x-3=0$, so $x=3$.
Solution set: $\{3\}$.

القيمة المطلقة تكون صفر فقط إذا كان $x-3=0$ ، وبالتالي $x=3$. مجموعة الحل هي $\{3\}$.

1.2.6 Linear inequalities in non-standard form

Simplify and Analyze Critical Points: Rewrite the inequality from the non-standard form $\frac{a}{x-b} \leq c$ into a standard form $a \leq c(x-b)$ taking into consideration the sign of $(x-b)$. Identify critical points from $(x-b)=0$.
تبسيط وتحليل النقاط الحرجة: إعادة كتابة المتباينة لعزل الكسر على أحد الطرفين. على سبيل المثال إعادة كتابة المتباينة من الشكل غير القياسي $\frac{a}{x-b} \leq c$ إلى الشكل القياسي $a \leq c(x-b)$ مع الأخذ في الاعتبار إشارة $(x-b)$. حدد النقاط الحرجة من $(x-b)=0$.

Solve for Each Case:

- For $(x-b)>0$, solve $a \leq c(x-b)$.
- For $(x-b)<0$, solve $a \geq c(x-b)$.

حل كل حالة:

- عندما $(x-b)>0$ ، حل $a \leq c(x-b)$.
- عندما $(x-b)<0$ ، حل $a \geq c(x-b)$.

Combine Solutions: Combine solutions from both cases while excluding the critical point $x=b$ to ensure the denominator is not zero.
دمج الحلول: قم بدمج الحلول من الحالتين مع استبعاد النقطة الحرجة $x=b$ لضمان أن المقام لا يساوي صفرًا.

Example 1.2.21.

Solve the inequality $\dfrac{5}{x-3} \geq 2$ and sketch the solution on the real line.

Solution

Step 1: Understand the Domain

The term $x-3$ in the denominator must not be zero. This gives the restriction: $x \neq 3$. and since $5 > 0$, the term $x-3$ must be strictly positive i.e. $x > 3$.

Step 2: Rearrange the Inequality

Multiply both sides by $(x-3)$, which is always positive, to avoid changing the inequality's direction:

$$\frac{5}{x-3} \geq 2 \implies 5 \geq 2(x-3) \implies \frac{11}{2} \geq x$$

Step 3: Take the intersection between $x \leq \frac{11}{2}$ and $x > 3$

Thus, the solution is: $x \in (3, \frac{11}{2}]$.

Step 4: Sketch the Solution on the Real Line

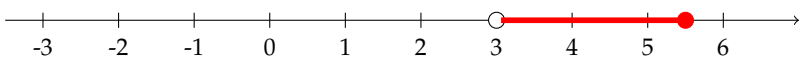


Figure 1.7: Representation of the semi-open interval $(3, \frac{11}{2}]$ on the real line

Example 1.2.22.

Solve the inequality $\dfrac{3}{1-x} < 2$ and sketch the solution on the real line.

Solution

Step 1: Determine the Domain The denominator $1-x$ must not be zero: $1-x \neq 0$ implies $x \neq 1$. Thus, $x = 1$ is excluded from the solution.

Step 2: Rearrange the Inequality Multiply both sides by $(1-x)$ and consider the two cases $x-1 > 0$ and $x-1 < 0$:

$$3 < 2(1-x) \quad \text{and} \quad 1-x > 0 \qquad \text{or} \qquad 3 > 2(1-x) \quad \text{and} \quad 1-x < 0.$$

This leads to

$$3 < 2-2x \quad \text{and} \quad 1 > x \qquad \text{or} \qquad 3 > 2-2x \quad \text{and} \quad 1 < x.$$

Simplify

$$-\frac{1}{2} > x \quad \text{and} \quad 1 > x \qquad \text{or} \qquad -\frac{1}{2} < x \quad \text{and} \quad 1 < x.$$

By merging the results, we get

$$-\frac{1}{2} > x \qquad \text{or} \qquad 1 < x.$$

Step 3: Combine the Results The solution is: $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$.
Step 4: Sketch the Solution on the Real Line

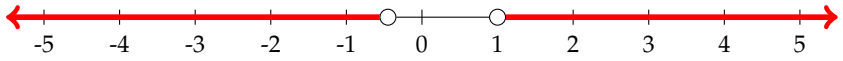


Figure 1.8: Representation of the union of intervals $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$ on the real line

1.2.7 Exercises on Linear inequalities in non-standard form

Question 1.2.53. Solve the inequality $\dfrac{6}{4-x} > 6$.
A) $(-\infty, 2)$
B) $(2, 4)$
C) $(3, 4)$
D) $x > 6$
E) None of these choices

Answer: C) $(3, 4)$
Step 1: Determine the Domain
The denominator $4 - x$ must not be zero:
$4 - x \neq 0 \implies x \neq 4$.
Step 2: Rearrange the Inequality
Multiply both sides by $(4 - x)$, which is always positive:
$\frac{6}{4-x} > 6 \implies 6 > 6(4 - x)$.
Step 3: Simplify the Inequality
Distribute and simplify: $6 > 24 - 6x$. Rearrange the terms: $6x > 24 - 6 \implies 6x > 18$.
Divide through by 6: $x > 3$.
Step 4: Exclude Undefined Points
From Step 1, $x = 4$ is excluded from the solution.
Final Answer: The solution is: $x \in (3, 4) \cup (4, \infty)$.

اضرب الطرفين في $(4 - x)$، ثم حل لإيجاد x مع مراعاة مجال التعريف $(3, \infty)$.

Question 1.2.54. Find the solution of $\dfrac{-5}{x-3} \leq 5$.
A) $(3, \infty)$
B) $(-\infty, 5) \cup (3, 5]$
C) $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$
D) $[2, 3) \cup (3, \infty)$
E) None of these choices

Answer: D) $[2,3) \cup (3,\infty)$
Step 1: Determine the Domain
The denominator $x-3 \neq 0$, so $x \neq 3$.
Step 2: Rearrange the Inequality
Multiply both sides by $(x-3)$, which is always positive: $\frac{-5}{x-3} \leq 5 \implies -5 \leq 5(x-3)$.
Step 3: Solve for x
Simplify: $-5 \leq 5x-15 \implies 10 \leq 5x \implies x \geq 2$.
Step 4: Exclude Undefined Points
Since $x=3$ makes the denominator zero, exclude it: $x \in [2,3) \cup (3,\infty)$.

الخطوة 1 : تحديد المجال
المقام $x-3 \neq 0$ ، وبالتالي $x \neq 3$.
الخطوة 2 : إعادة ترتيب المتباينة
نضرب كلا الطرفين في $(x-3)$ ، وهو دائمًا موجب:
$\frac{-5}{x-3} \leq 5 \implies -5 \leq 5(x-3)$.
الخطوة 3 : حل x
نبسط: $-5 \leq 5x-15 \implies 10 \leq 5x \implies x \geq 2$.
الخطوة 4 : استبعاد النقاط غير المعرفة بما أن $x=3$ يجعل المقام صفرًا، نستبعده: $x \in [2,3) \cup (3,\infty)$.

Question 1.2.55. Determine the solution of $\frac{7}{x-1} < 3$.
A) $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$
B) $(-\infty,1) \cup (1,\frac{7}{3})$
C) $(1,\frac{7}{3})$
D) $(1,\infty)$
E) None of these choices

Answer: C) $(1,\frac{7}{3})$
Multiply both sides by $(x-1)^2$, solve, and account for the domain $x \neq 1$.

اضرب كلا الطرفين في $(x-1)^2$ ، ثم حل مع مراعاة أن $x \neq 1$.

Question 1.2.56. Find the range of $\frac{4}{x+2} \geq 1$.
A) $(-\infty,-3] \cup (-2,\infty)$
B) $(-3,\infty)$
C) $(-\infty,-2) \cup (-2,-1)$
D) $(-\infty,-3)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty,-3] \cup (-2,\infty)$
Rewrite as $4 \geq x+2$, solve for x, and exclude $x=-2$.

أعد كتابة المتباينة كالتالي $4 \geq x+2$ ، ثم حل لإيجاد x ، مع استبعاد $x=-2$.

Question 1.2.57. Solve the inequality $\frac{6}{x+5} > 4$.
A) $(-\infty,-5) \cup (-5,\frac{6}{4})$
B) $(-\infty,-6) \cup (-5,\infty)$
C) $(-5,-\frac{1}{2})$
D) $(-6,\infty)$
E) None of these choices

Answer: C) $(-5, -\frac{1}{2})$
Multiply through by $(x+5)^2$, solve, and exclude $x = -5$.

اضرب كلا الطرفين في $(x+5)^2$ ، ثم حل مع استبعاد $x = -5$.

Chapter 2

Non-Linear Equations and Inequalities

2.1. Quadratic Equations

2.1.1 Short review on Quadratic Equation and Quadratic Function

A **Quadratic Equation:** is an equation of the form:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

where a, b, and c are constants, and $a \neq 0$. The goal is to find the values of x that satisfy the equation. The quadratic equation represents a condition that must be true for certain values of x.

A **Quadratic Function:** is a function of the form:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

where a, b, and c are constants, and $a \neq 0$. In this case, $f(x)$ represents the output for any input x. The quadratic function defines a parabolic curve when graphed, but it is not an equation to solve—it maps values of x to values of $f(x)$.

The **Key Differences** between function and equation is:

- A quadratic equation requires solving for specific values of x where the equation equals zero.
- A quadratic function is a rule that assigns an output $f(x)$ for each input x, and it can be graphed as a parabola.

المعادلة التربيعية هي معادلة على الشكل:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت، و $a \neq 0$. الهدف هو إيجاد قيم x التي تحقق هذه المعادلة.

الدالة التربيعية هي دالة على الشكل:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت، و $a \neq 0$. الدالة التربيعية تعطي قيمة $f(x)$ لكل قيمة لـ x ، وتُظهر منحنى على شكل قطع مكافئ عند تمثيلها.

الفرق الرئيسي: بين الدالة والمعادلة هو:

1 . المعادلة التربيعية تتطلب إيجاد قيم معينة لـ x حيث تكون المعادلة مساوية للصفر.

2 . الدالة التربيعية هي علاقة تربط بين المدخلات x والمخرجات $f(x)$ ، وتنتج منحنى عند رسمها.

Both share the same algebraic structure but serve different purposes: one involves finding specific solutions, and the other involves mapping inputs to outputs.

لحساب نقاط التقاطع للدالة $f(x) = x^2 - 1 = 0$ مع المحورين، سنجد نقطتي تقاطع:

نقطة التقاطع مع المحور y : عندما $x = 0$ ، نحسب قيمة $f(x)$:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1.$$

إذن، نقطة التقاطع مع المحور y هي $(0, -1)$.

نقاط التقاطع مع المحور x : نجد نقاط التقاطع مع المحور x عن طريق حل المعادلة $x^2 - 1 = 0$. نعيد ترتيب المعادلة:

$$x^2 = 1.$$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الجانبين، نحصل على:

$$x = \pm 1.$$

إذن، نقاط التقاطع مع المحور x هي $(-1, 0)$ و $(1, 0)$.

الخلاصة: للدالة $f(x) = x^2 - 1$ نقطتان للتقاطع مع المحور x ، وهما $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ ، ونقطة تقاطع واحدة مع المحور y وهي $(0, -1)$.

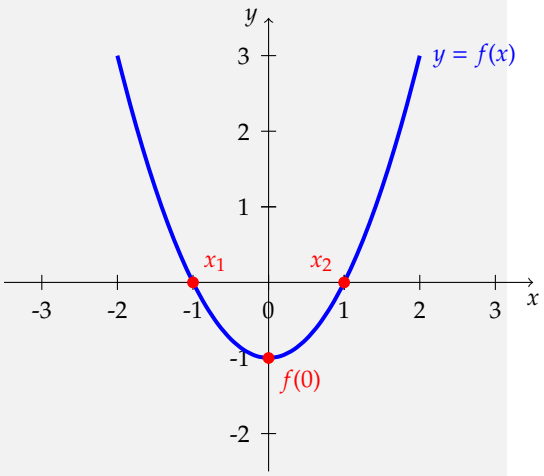


Figure 1. Quadratic Function with two Real Roots $x_1 = -1$ and $x_2 = 1$ for the function $x^2 - 1 = 0$.

تفسير نقاط التقاطع للدالة $f(x) = (x-1)^2 = 0$

لحساب نقاط التقاطع للدالة $f(x) = (x-1)^2 = 0$ مع المحورين، نبحث عن نقاط التقاطع مع المحور x والمحور y .

1. **نقطة التقاطع مع المحور y :** عندما $x = 0$ ، نحسب قيمة $f(x)$:

$$f(0) = (0-1)^2 = 1.$$

إذن، نقطة التقاطع مع المحور y هي $(0, 1)$.

2. **نقطة التقاطع مع المحور x :** نجد نقاط التقاطع مع المحور x عن طريق حل المعادلة $(x-1)^2 = 0$. نأخذ الجذر التربيعي لكلا الجانبين:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

إذن، نقطة التقاطع مع المحور x هي $(1, 0)$ فقط.

الخلاصة: للدالة $f(x) = (x-1)^2$ نقطة تقاطع واحدة مع المحور x عند $(1, 0)$ ونقطة تقاطع مع المحور y عند $(0, 1)$.

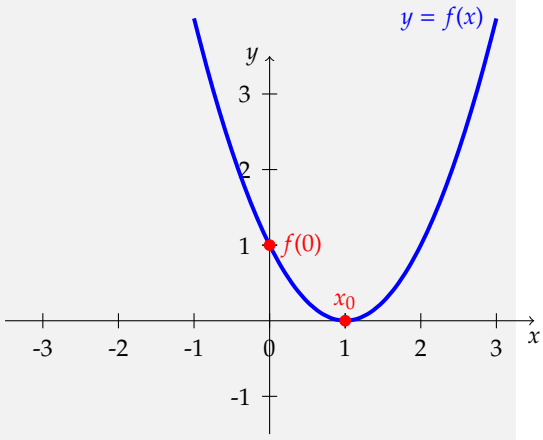


Figure 2. Quadratic Function with One Real Root $x_0 = 1$ for the function $(x-1)^2 = 0$.

تفسير نقاط التقاطع للدالة $f(x) = (x-1)^2 + 1 = 0$

لحساب نقاط التقاطع للدالة $f(x) = (x-1)^2 + 1 = 0$ مع المحورين، نبحث عما إذا كانت هناك قيم تحقق المعادلة بحيث تقطع المحورين.

1. **التقاطع مع المحور** y : نجد قيمة $f(x)$ عندما $x = 0$:

$$f(0) = (0-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

إذن، نقطة الدالة عندما $x = 0$ هي $(0, 2)$.

2. **التقاطع مع المحور** x : للبحث عن نقاط تقاطع مع المحور x ، يجب أن تكون $f(x) = 0$. نحل المعادلة:

$$(x-1)^2 + 1 = 0$$

نعيد ترتيب المعادلة للحصول على: $(x-1)^2 = -1$

هذه المعادلة ليس لها حل في الأعداد الحقيقية، لأن مربع أي عدد حقيقي لا يمكن أن يكون سالباً. لذلك، لا توجد نقاط تقاطع مع المحور x .

الخلاصة: الدالة $f(x) = (x-1)^2 + 1$ ليس لها نقاط تقاطع مع المحورين x أو y ، لأن قيمة الدالة دائمًا موجبة ولا يمكن أن تساوي الصفر.

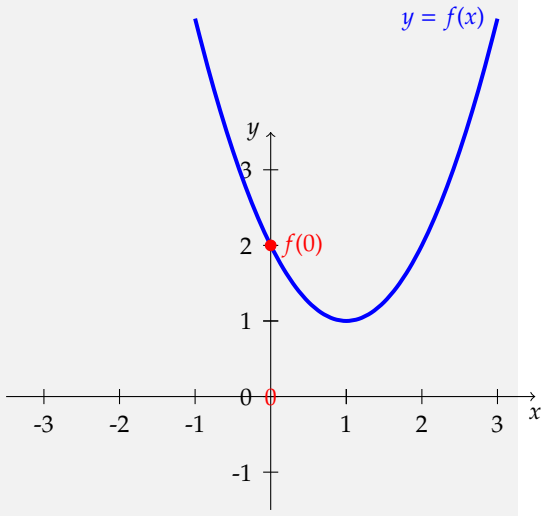


Figure 3. Quadratic Function with No Real Roots for the function $(x-1)^2 + 1 = 0$.

Remark. Same analysis can be done for the quadratic function with down concavity. See figures below:

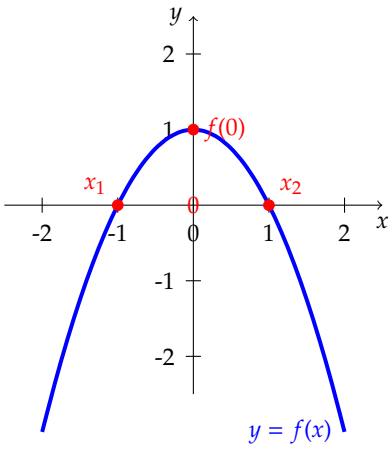


Figure 4. Parabola with Two Intersections.

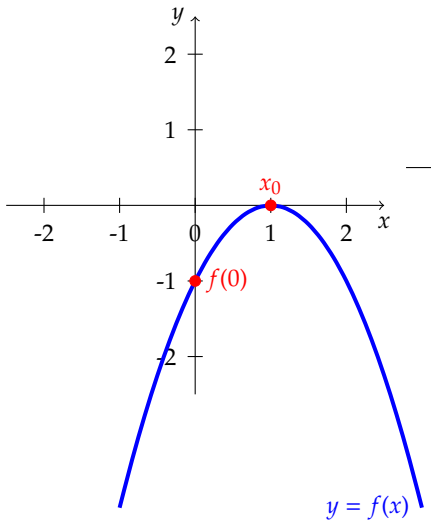


Figure 5. Parabola with One Intersection.

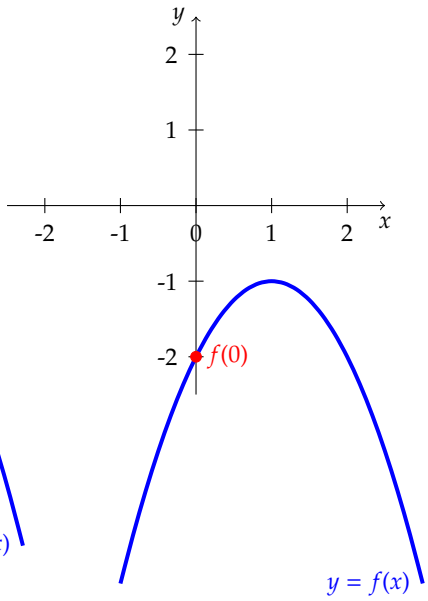


Figure 6. Parabola with No Intersection.

2.1.2 Exercises

Question 2.1.58.

Solve the quadratic equation $x^2 - 5x + 6 = 0$. A) $x = -2$ or $x = 3$
B) $x = 2$ or $x = 3$
C) $x = 6$
D) $x = -1$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 2$ or $x = 3$
Factor the quadratic equation:
$(x-2)(x-3) = 0$.
So, $x = 2$ or $x = 3$.

نقوم بتحليل المعادلة التربيعية:
$(x-2)(x-3) = 0$.
إذًا، $x = 2$ أو $x = 3$.

Question 2.1.59.

Solve the quadratic equation $x^2 + 6x + 9 = 0$. A) $x = -3$
B) $x = 3$
C) $x = -2$
D) $x = -1$
E) None of these choices

Answer: A) $x = -3$
Factor the perfect square:
$(x+3)^2 = 0$.
So, $x = -3$.

نقوم بتحليل المربع الكامل:
$(x+3)^2 = 0$.
إذًا، $x = -3$.

Question 2.1.60.

Solve the quadratic equation $x^2 - 4x - 5 = 0$. A) $x = 5$ and $x = 1$
B) $x = 2$ or $x = 1$
C) $x = 0$ or $x = 1$
D) $x = 5$ and $x = -1$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 5$ and $x = -1$
Use the quadratic formula:
$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{4\pm6}{2}$.
Thus, $x = 5$ or $x = -1$.

نستخدم معادلة الدرجة الثانية:
$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{4\pm6}{2}$
.
إذًا، $x = 5$ أو $x = -1$.

Question 2.1.61.

Solve the quadratic equation $x^2 + 4x + 5 = 0$. A) $x = 1$
B) $x = -1$
C) No real solution
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) No real solution
The discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ is negative:
$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$.
Since the discriminant is negative, there is no real solution.

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ سالب:
$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$.
بما أن المميز سالب، فلا يوجد حل حقيقي.

Question 2.1.62.

Solve the quadratic equation $x^2 - 9 = 0$. A) $x = 1$ or $x = -3$
B) $x == 3$
C) $x = 3$
D) $x = 3$ and $x = -3$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 3$ or $x = -3$
Factor the difference of squares:
$(x - 3)(x + 3) = 0$.
So, $x = 3$ or $x = -3$.

نقوم بتحليل الفرق بين مربعين:
$(x - 3)(x + 3) = 0$.
إذًا، $x = 3$ أو $x = -3$.

Question 2.1.63.

Solve the quadratic equation $x^2 + 2x = 3$. A) $x = 1$ or $x = -3$
B) $x = 2$ or $x = -1$
C) $x = 1$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 1$ or $x = -3$
First, move the 3 to the left:
$x^2 + 2x - 3 = 0$.
Now, factor:
$(x - 1)(x + 3) = 0$.
Thus, $x = 1$ or $x = -3$.

أولاً، نضع الـ 3 في الطرف الأيسر:
$x^2 + 2x - 3 = 0$.
ثم نحلل:
$(x - 1)(x + 3) = 0$.
إذًا، $x = 1$ أو $x = -3$.

Question 2.1.64.

Solve the quadratic equation $2x^2 - 4x + 1 = 0$. A) $x = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$ and $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$
B) $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
C) $x = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $x = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
D) $x = 2$ or $x = \frac{1}{2}$
E) None of these choices

Answer: B) None of these choices
Using the quadratic formula:
$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

نستخدم معادلة الدرجة الثانية:

$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
.

Question 2.1.65.

Solve the quadratic equation $x^2 + 8x + 16 = 0$. A) $x = 4$
B) $x = -4$
C) $x = 0$
D) $x = -2$
E) None of these choices

Answer: B) $x = -4$
This is a perfect square:
$(x + 4)^2 = 0$.
So, $x = -4$.

هذه معادلة لمربع كامل:
$(x + 4)^2 = 0$.
إذًا، $x = -4$.

Question 2.1.66.

Solve the quadratic equation $x^2 - 16 = 0$. A) $x = 4$ and $x = -1$
B) $x = -4$ and $x = 1$
C) $x = -4$ and $x = 4$
D) $x = -16$ and $x = 16$
E) None of these choices

Answer: C) $x = 4$ or $x = -4$
This is a difference of squares:
$(x - 4)(x + 4) = 0$.
So, $x = 4$ or $x = -4$.

هذا هو الفرق بين مربعين:
$(x - 4)(x + 4) = 0$.
إذًا، $x = 4$ أو $x = -4$.

Question 2.1.67.

Solve the quadratic equation $x^2 + x - 2 = 0$. A) $x = 2$ and $x = -1$
B) $x = -2$ and $x = 1$
C) $x = -2$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: B) $x = -2$ or $x = 1$
Using the quadratic formula:
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$.
Thus, $x = -2$ or $x = 1$.

نستخدم معادلة الدرجة الثانية:
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$.
إذًا، $x = -2$ أو $x = 1$.

Question 2.1.68.

Solve the quadratic equation $x^2 + 6x + 9 = 0$. A) $x = 3$
B) $x = -3$
C) $x = 0$
D) $x = 6$
E) None of these choices

Answer: B) $x = -3$
This is a perfect square trinomial:
$(x + 3)^2 = 0$.
So, $x = -3$ is the only solution.

هذه معادلة تربيعية لمربع كامل:
$(x + 3)^2 = 0$.
إذًا، $x = -3$ هو الحل الوحيد.

Question 2.1.69.

Solve the quadratic equation $x^2 + 4x + 8 = 0$. Does it have a solution? A) $x = 2$ or $x = -2$
B) No real solution
C) $x = 4$
D) $x = -4$
E) None of these choices

Answer: B) No real solution
The discriminant is negative:
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16$.
Since the discriminant is negative, there is no real solution.

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ سالب:
$\Delta = 4^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16$.
بما أن المميز سالب، فلا يوجد حل حقيقي.

Question 2.1.70.

Solve the quadratic equation $x^2 + 10x + 25 = 0$. A) $x = 5$
B) $x = -25$
C) $x = -5$
D) $x = 2$
E) None of these choices

Answer: C) $x = -5$
This is a perfect square trinomial:
$(x + 5)^2 = 0$.
So, $x = -5$ is the only solution.

هذه معادلة تربيعية لمربع كامل:
$(x + 5)^2 = 0$.
إذًا، $x = -5$ هو الحل الوحيد.

Question 2.1.71.

Solve the quadratic equation $x^2 - 25 = 0$. A) $x = 0$
B) $x = 5$
C) $x = -5$
D) $x = 5$ or $x = -5$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 5$ or $x = -5$
This is a difference of squares:
$(x - 5)(x + 5) = 0$.
So, $x = 5$ or $x = -5$.

هذا هو الفرق بين مربعين:
$(x - 5)(x + 5) = 0$.
إذًا، $x = 5$ أو $x = -5$.

Question 2.1.72.

Solve the quadratic equation $x^2 = 0$. A) $x = 0$
B) $x = 2$
C) $x = -2$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 0$
Since $x^2 = 0$, we only have one solution: $x = 0$.

بما أن $x^2 = 0$ ، فالحل الوحيد هو $x = 0$.

Question 2.1.73.

Solve the quadratic equation $x^2 + 1 = 0$. Does it have a solution? A) $x = -1$ or $x = 1$
B) No real solution

C) $x = 0$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: B) No real solution
The discriminant is negative:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4$.
Since the discriminant is negative, there is no real solution.

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ سالب:
$\Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4$.
بما أن المميز سالب، فلا يوجد حل حقيقي.

Question 2.1.74.

Solve the equation $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ by substituting $y = x^2$. A) $x = \sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{3}$
B) $x = 1$ or $x = -1$
C) $x = \pm\sqrt{2}$ or $x = \pm\sqrt{3}$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) $x = \pm\sqrt{2}$ or $x = \pm\sqrt{3}$
First, substitute $y = x^2$:
$y^2 - 5y + 6 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y - 3)(y - 2) = 0$, so $y = 3$ or $y = 2$.
Since $y = x^2$, we have $x^2 = 2$ or $x^2 = 3$.
Thus, $x = \pm\sqrt{2}$ or $x = \pm\sqrt{3}$.

أولاً، نبدل $y = x^2$:
$y^2 - 5y + 6 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y - 3)(y - 2) = 0$ ، إذًا $y = 3$ أو $y = 2$.
بما أن $y = x^2$ ، لدينا $x^2 = 2$ أو $x^2 = 3$.
إذًا، $x = \pm\sqrt{2}$ أو $x = \pm\sqrt{3}$.

Question 2.1.75.

Solve the equation $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ by substituting $y = x^2$. A) $x = 2$ and $x = -2$
B) $x = \sqrt{3}$ and $x = -\sqrt{3}$
C) $x = \pm 2$
D) $x = \pm\sqrt{2}$
E) None of these choices

Answer: D) $x = \pm\sqrt{2}$
First, substitute $y = x^2$:
$y^2 + 2y - 8 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y+4)(y-2) = 0$, so $y = -4$ or $y = 2$.
Since $y = x^2$, discard $y = -4$ (no real solution), and keep $y = 2$.
Thus, $x = \pm\sqrt{2}$.

أولاً، نبدل $y = x^2$:
$y^2 + 2y - 8 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y+4)(y-2) = 0$ ، إذًا $y = -4$ أو $y = 2$.
بما أن $y = x^2$ ، نستبعد $y = -4$ لأنه لا يوجد حل حقيقي، ونأخذ $y = 2$.
إذًا، $x = \pm\sqrt{2}$.

Question 2.1.76.

Solve the equation $x^4 - 4x^2 = 0$ by substituting $y = x^2$. A) $x = 2$ and $x = -2$
B) $x = 1$ and $x = -1$
C) $x = 0$ and $x = \pm 2$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: C) $x = 0$ or $x = \pm 2$
First, substitute $y = x^2$:
$y^2 - 4y = 0$.
Now, factor:
$y(y-4) = 0$, so $y = 0$ or $y = 4$.
Since $y = x^2$, we have $x^2 = 0$ or $x^2 = 4$.
Thus, $x = 0$ or $x = \pm 2$.

أولاً، نبدل $y = x^2$:
$y^2 - 4y = 0$.
نحلل المعادلة:
$y(y-4) = 0$ ، إذًا $y = 0$ أو $y = 4$.
بما أن $y = x^2$ ، لدينا $x^2 = 0$ أو $x^2 = 4$.
إذًا، $x = 0$ أو $x = \pm 2$.

Question 2.1.77.

Solve the equation $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ by substituting $y = x^2$. A) $x = 3$ and $x = -3$
B) $x = 1$ and $x = -1$
C) $x = \pm\sqrt{3}$
D) $x = 0$ and $x = \pm\sqrt{3}$
E) None of these choices

Answer: C) $x = \pm\sqrt{3}$
First, substitute $y = x^2$:
$y^2 - 6y + 9 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y-3)(y-3) = 0$, so $y = 3$.
Since $y = x^2$, we have $x^2 = 3$.
Thus, $x = \pm\sqrt{3}$.

أولاً، نبدل $y = x^2$:
$y^2 - 6y + 9 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y-3)(y-3) = 0$ ، إذًا $y = 3$.
بما أن $y = x^2$ ، لدينا $x^2 = 3$.
إذًا، $x = \pm\sqrt{3}$.

Question 2.1.78.

Solve the equation $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ by substituting $y = x^2$. A) $x = \pm 5$
B) $x = 2$ and $x = -2$
C) $x = 1$ and $x = -1$
D) $x = \pm\sqrt{5}$
E) None of these choices

Answer: D) $x = \pm\sqrt{5}$
First, substitute $y = x^2$:
$y^2 - 3y - 10 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y - 5)(y + 2) = 0$, so $y = 5$ or $y = -2$.
Since $y = x^2$, discard $y = -2$ (no real solution), and keep $y = 5$.
Thus, $x = \pm\sqrt{5}$.

أولاً، نبدل $y = x^2$:
$y^2 - 3y - 10 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y - 5)(y + 2) = 0$ ، إذًا $y = 5$ أو $y = -2$.
بما أن $y = x^2$ ، نستبعد $y = -2$ لأنه لا يوجد حل حقيقي، ونأخذ $y = 5$.
إذًا، $x = \pm\sqrt{5}$.

Question 2.1.79.

Solve the equation $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ by substituting $y = e^x$. A) $x = \ln(1)$ and $x = \ln(6)$
B) $x = 0$ or $x = \ln(2)$
C) $x = 1$ and $x = \ln(1)$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 0$
First, substitute $y = e^x$:
$y^2 + 5y - 6 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y - 1)(y + 6) = 0$, so $y = 1$ or $y = -6$.
Since $y = e^x$, discard $y = -6$ (no real solution), and keep $y = 1$.
Thus, $e^x = 1$, so $x = \ln(1) = 0$.

أولاً، نبدل $y = e^x$:
$y^2 + 5y - 6 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y - 1)(y + 6) = 0$ ، إذًا $y = 1$ أو $y = -6$.
بما أن $y = e^x$ ، نستبعد $y = -6$ لأنه لا يوجد حل حقيقي، ونأخذ $y = 1$.
إذًا، $e^x = 1$ وبالتالي $x = \ln(1) = 0$.

Question 2.1.80.

Solve the equation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ by substituting $y = e^x$. A) $x = \ln(4)$ and $x = \ln(1)$
B) $x = 0$ and $x = \ln(2)$
C) $x = \ln(4)$
D) $x = \ln(4)$ or $x = -\ln(1)$
E) None of these choices

Answer: C) $x = \ln(4)$
First, substitute $y = e^x$:
$y^2 - 3y - 4 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y-4)(y+1) = 0$, so $y = 4$ or $y = -1$.
Since $y = e^x$, discard $y = -1$ (no real solution), and keep $y = 4$.
Thus, $e^x = 4$, so $x = \ln(4)$.

أولاً، نبدل $y = e^x$:
$y^2 - 3y - 4 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y-4)(y+1) = 0$ ، إذًا $y = 4$ أو $y = -1$.
بما أن $y = e^x$ ، نستبعد $y = -1$ لأنه لا يوجد حل حقيقي، ونأخذ $y = 4$.
إذًا، $e^x = 4$ وبالتالي $x = \ln(4)$.

Question 2.1.81.
Solve the equation $e^{2x} + 7e^x + 10 = 0$ by substituting $y = e^x$. A) $x = \ln(2)$ or $x = \ln(1)$
B) $x = \ln(5)$
C) No real solution
D) $x = 0$ or $x = \ln(3)$
E) None of these choices

Answer: C) No real solution
First, substitute $y = e^x$:
$y^2 + 7y + 10 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y+5)(y+2) = 0$, so $y = -5$ or $y = -2$.
Since $y = e^x$ and the exponential function is always positive, there is no real solution.

أولاً، نبدل $y = e^x$:
$y^2 + 7y + 10 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y+5)(y+2) = 0$ ، إذًا $y = -5$ أو $y = -2$.
بما أن $y = e^x$ والدالة الأسية دائمًا موجبة، فلا يوجد حل حقيقي.

Question 2.1.82.
Solve the equation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ by substituting $y = e^x$. A) $x = \ln(1)$ or $x = \ln(3)$
B) $x = 0$
C) $x = \ln(1)$
D) $x = \ln(3)$ or $x = \ln(1)$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 0$
First, substitute $y = e^x$:
$y^2 + 2y - 3 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y-1)(y+3) = 0$, so $y = 1$ or $y = -3$.
Since $y = e^x$, discard $y = -3$ (no real solution), and keep $y = 1$.
Thus, $e^x = 1$, so $x = \ln(1) = 0$.

أولاً، نبدل $y = e^x$:
$y^2 + 2y - 3 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y-1)(y+3) = 0$ ، إذًا $y = 1$ أو $y = -3$.
بما أن $y = e^x$ ، نستبعد $y = -3$ لأنه لا يوجد حل حقيقي، ونأخذ $y = 1$.
إذًا، $e^x = 1$ وبالتالي $x = \ln(1) = 0$.

Question 2.1.83.

Solve the equation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ by substituting $y = e^x$. A) $x = \ln(1)$ or $x = \ln(2)$
B) $x = \ln(1)$ or $x = \ln(4)$
C) $x = \ln(1)$ or $x = \ln(3)$
D) $x = \ln(2)$ or $x = \ln(1)$
E) None of these choices

Answer: C) $x = \ln(1)$ or $x = \ln(3)$
First, substitute $y = e^x$:
$y^2 - 4y + 3 = 0$.
Now, solve the quadratic:
$(y-1)(y-3) = 0$, so $y = 1$ or $y = 3$.
Thus, $x = \ln(1) = 0$ or $x = \ln(3)$.

أولاً، نبدل $y = e^x$:
$y^2 - 4y + 3 = 0$.
نحل المعادلة التربيعية:
$(y-1)(y-3) = 0$ ، إذًا $y = 1$ أو $y = 3$.
إذًا، $x = \ln(1) = 0$ أو $x = \ln(3)$.

Question 2.1.84.

Solve the equation $|x^2 - 4| = 3$. A) $x = 1$ or $x = -1$
B) $x = \pm 7$ or $x = \pm 1$
C) $x = \pm\sqrt{7}$ or $x = \pm 1$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: C) $x = \pm\sqrt{7}$ or $x = \pm 1$
To solve this equation, break it into two cases:
1) $x^2 - 4 = 3$, so $x^2 = 7$, thus $x = \pm\sqrt{7}$.
2) $x^2 - 4 = -3$, so $x^2 = 1$, thus $x = \pm 1$.

لحل هذه المعادلة، نقسمها إلى حالتين:
١) $x^2 - 4 = 3$ ، إذًا $x^2 = 7$ ، وبالتالي $x = \pm\sqrt{7}$.
٢) $x^2 - 4 = -3$ ، إذًا $x^2 = 1$ ، وبالتالي $x = \pm 1$.

Question 2.1.85.

Solve the equation $|x^2 - 9| = 0$. A) $x = 3$ or $x = -3$
B) $x = 9$ or $x = -9$
C) $x = 9$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 3$ or $x = -3$
Solve the absolute value equation:
$|x^2 - 9| = 0$ implies $x^2 - 9 = 0$.
Thus, $x^2 = 9$, and $x = \pm 3$.

لحل معادلة القيمة المطلقة:
$|x^2 - 9| = 0$ تعني $x^2 - 9 = 0$.
إذًا، $x^2 = 9$ ، وبالتالي $x = \pm 3$.

Question 2.1.86.

Solve the equation $|x^2 + 3x - 6| = 4$. A) $x = 2$ and $x = -5$
B) $x = 2$ and $x = -5$ and $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$
C) $x = \pm 2$ or $x = \pm 1$
D) $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 2$ and $x = -5$ and $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$
Break the equation into two cases:
1) $x^2 + 3x - 6 = 4$, so $x^2 + 3x - 10 = 0$. Solving, $x = 2$ or $x = -5$.
2) $x^2 + 3x - 6 = -4$, so $x^2 + 3x - 2 = 0$. Solving, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.
Thus, the solutions are $x = 2$, $x = -5$, $x = 1$, and $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

نقسم المعادلة إلى حالتين:
١) $x^2 + 3x - 6 = 4$ ، إذًا $x^2 + 3x - 10 = 0$. الحل $x = 2$ أو $x = -5$.
٢) $x^2 + 3x - 6 = -4$ ، إذًا $x^2 + 3x - 2 = 0$. الحل $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.
إذًا، الحلول هي $x = 2$ ، $x = -5$ و $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

2.2. Quadratic Inequalities

2.2.1 Summary how to solve Quadratic Inequalities

Solving Quadratic Inequalities:
To solve a quadratic inequality, such as $ax^2+bx+c>0$ or $ax^2+bx+c<0$, follow these steps:

1. **Rewrite the inequality** in standard form if necessary, with zero on one side, for example: $ax^2+bx+c>0$.
2. **Solve the corresponding quadratic equation** $ax^2+bx+c=0$ to find the roots.
3. **Use the roots to divide the number line** into intervals. For example, if the roots are x_1 and x_2, the intervals are $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), and (x_2, ∞).
4. **Test each interval** by choosing a point in each to determine whether it satisfies the inequality. Substitute the test point into the inequality.
5. **Write the solution** based on the intervals that satisfy the inequality.

Example: Solve $x^2-4<0$.
1. Rewrite as $(x-2)(x+2)<0$.
2. The roots are $x=-2$ and $x=2$.
3. Test intervals: $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,\infty)$.
4. Only the interval $(-2,2)$ satisfies the inequality, so the solution is $-2<x<2$.

حل المتباينات التربيعية

لحل متباينة تربيعية، مثل $ax^2+bx+c>0$ أو $ax^2+bx+c<0$، اتبع الخطوات التالية:

1. **أعد كتابة المتباينة** بالشكل القياسي بحيث يكون الصفر في جهة واحدة، مثلًا: $ax^2+bx+c>0$.
2. **حل المعادلة التربيعية المكافئة** $ax^2+bx+c=0$ لإيجاد الجذور (الحلول).
3. **استخدم الجذور لتقسيم خط الأعداد** إلى فترات. إذا كانت الجذور هي x_1 و x_2، فالفترات هي $(-\infty, x_1)$، (x_1, x_2)، و (x_2, ∞).
4. **اختبر كل فترة** عن طريق اختيار نقطة داخل كل فترة وتحديد ما إذا كانت تحقق المتباينة. قم بتعويض النقطة المختارة في المتباينة.
5. **اكتب الحل** بناءً على الفترات التي تحقق المتباينة.

مثال: حل $x^2-4<0$.

1. أعد كتابة المتباينة على الشكل $(x-2)(x+2)<0$.
2. الجذور هي $x=-2$ و $x=2$.
3. اختبار الفترات: $(-\infty,-2)$، $(-2,2)$، $(2,\infty)$.
4. الفترة الوحيدة التي تحقق المتباينة هي $(-2,2)$، إذًا الحل هو $-2<x<2$.

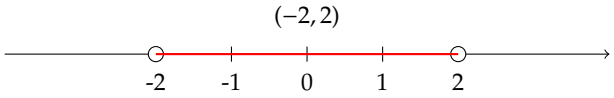


Figure 7. The open interval $(-2,2)$.

2.2.2 Exercises

Question 2.2.87.

Solve the inequality $x^2-4\le 0$. A) $[-2,2]$
B) $(2,\infty)$
C) $(-\infty,2)$
D) $(-2,2)$

E) None of these choices

Detailed Solution. **Answer:** A) $[-2, 2]$
Rewrite the inequality as $(x-2)(x+2) \leq 0$.
1. Factor the quadratic expression: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
2. Set each factor equal to zero to find the boundary points:
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
3. Plot these boundary points on a number line, dividing it into intervals: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2]$, and $(2, \infty)$.
4. Test values in each interval to determine where the inequality holds:
- In $(-\infty, -2)$: choose $x = -3$; $(x-2)(x+2) = (-3-2)(-3+2) = (-5)(-1) = 5 > 0$
- In $[-2, 2]$: choose $x = 0$; $(x-2)(x+2) = (0-2)(0+2) = (-2)(2) = -4 \leq 0$
- In $(2, \infty)$: choose $x = 3$; $(x-2)(x+2) = (3-2)(3+2) = (1)(5) = 5 > 0$
5. The solution is the interval where the inequality is satisfied: $x \in [-2, 2]$.

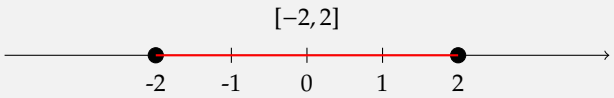


Figure 8. The closed interval $[-2, 2]$.

حل مفصل
نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-2)(x+2) \leq 0$.
1 . نحلل التعبير التربيعي: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
2 . نجد النقاط الحدودية عن طريق جعل كل عامل صفر:
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
3 . نضع هذه النقاط على خط الأعداد، ونقسمه إلى فترات: $(-\infty, -2)$ ، $[-2, 2]$ ، و $(2, \infty)$.
4 . نختبر القيم في كل فترة لتحديد مكان تحقق المتباينة:
ـ في $(-\infty, -2)$: نختار $x = -3$ ؛ $(x-2)(x+2) = (-3-2)(-3+2) = (-5)(-1) = 5 > 0$
ـ في $[-2, 2]$: نختار $x = 0$ ؛ $(x-2)(x+2) = (0-2)(0+2) = (-2)(2) = -4 \leq 0$
ـ في $(2, \infty)$: نختار $x = 3$ ؛ $(x-2)(x+2) = (3-2)(3+2) = (1)(5) = 5 > 0$
5 . الحل هو الفترة حيث تتحقق المتباينة: $x \in [-2, 2]$.

Question 2.2.88.

Solve the inequality $x^2 - 9 < 0$. A) $(-3, 3)$
B) $(3, \infty)$
C) $(-\infty, 3)$
D) $[-3, 3]$
E) None of these choices

Detailed Solution. **Answer:** A) $(-3, 3)$
Rewrite the inequality as $(x-3)(x+3) < 0$.
1. Factor the quadratic expression: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
2. Find the boundary points by setting each factor equal to zero:
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
3. Divide the number line into intervals based on these points: $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, and $(3, \infty)$.
4. Test values in each interval:
- In $(-\infty, -3)$: choose $x = -4$; $(x-3)(x+3) = (-4-3)(-4+3) = (-7)(-1) = 7 > 0$
- In $(-3, 3)$: choose $x = 0$; $(x-3)(x+3) = (0-3)(0+3) = (-3)(3) = -9 < 0$
- In $(3, \infty)$: choose $x = 4$; $(x-3)(x+3) = (4-3)(4+3) = (1)(7) = 7 > 0$
5. The solution is the interval where the inequality is satisfied: $x \in (-3, 3)$.

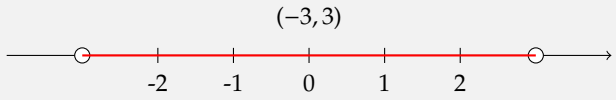


Figure 9. The open interval $(-3, 3)$.

حل مفصل
نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-3)(x+3) < 0$.
1 . نحلل التعبير التربيعي: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
2 . نجد النقاط الحدودية بجعل كل عامل يساوي صفرًا:
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
3 . نقسم خط الأعداد إلى فترات بناءً على هذه النقاط: $(-\infty, -3)$ ، $(-3, 3)$ ، و $(3, \infty)$.
4 . نختبر القيم في كل فترة:
- في $(-\infty, -3)$: نختار $x = -4$ ؛ $(x-3)(x+3) = (-4-3)(-4+3) = (-7)(-1) = 7 > 0$
- في $(-3, 3)$: نختار $x = 0$ ؛ $(x-3)(x+3) = (0-3)(0+3) = (-3)(3) = -9 < 0$
- في $(3, \infty)$: نختار $x = 4$ ؛ $(x-3)(x+3) = (4-3)(4+3) = (1)(7) = 7 > 0$

5 . الحل هو الفترة حيث تتحقق المتباينة: $x \in (-3,3)$.

Question 2.2.89.

Solve the inequality $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. A) $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$
B) $(2, 4)$
C) $(-3, 3)$
D) $[-3, 3]$
E) None of these choices

Detailed Solution. **Answer:** A) $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$
Rewrite as $(x-2)(x-4) \geq 0$.
1. Factor the quadratic expression: $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$.
2. Find the boundary points by setting each factor equal to zero:
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
3. Divide the number line into intervals based on these points: $(-\infty, 2)$, $[2, 4]$, and $(4, \infty)$.
4. Test values in each interval:
- In $(-\infty, 2)$: choose $x = 0$; $(x-2)(x-4) = (0-2)(0-4) = (-2)(-4) = 8 > 0$
- In $(2, 4)$: choose $x = 3$; $(x-2)(x-4) = (3-2)(3-4) = (1)(-1) = -1 < 0$
- In $(4, \infty)$: choose $x = 5$; $(x-2)(x-4) = (5-2)(5-4) = (3)(1) = 3 > 0$
5. The solution is the union of intervals where the inequality is satisfied: $x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$.

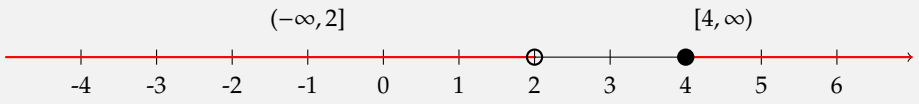


Figure 10. The union of intervals $(-\infty, 2]$ and$[4, \infty)$.

حل مفصل

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-2)(x-4) \geq 0$.

1 . نحلل التعبير التربيعي: $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$.

2 . نجد النقاط الحدودية بجعل كل عامل صفر:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

3 . نقسم خط الأعداد إلى فترات بناءً على هذه النقاط: $(-\infty,2)$ ، $[2,4]$ ، و $(4,\infty)$.
4 . نختبر القيم في كل فترة:
ـ في $(-\infty,2)$: نختار $x=0$ ؛ $(x-2)(x-4)=(0-2)(0-4)=(-2)(-4)=8>0$
ـ في $(2,4)$: نختار $x=3$ ؛ $(x-2)(x-4)=(3-2)(3-4)=(1)(-1)=-1<0$
ـ في $(4,\infty)$: نختار $x=5$ ؛ $(x-2)(x-4)=(5-2)(5-4)=(3)(1)=3>0$
5 . الحل هو اتحاد الفترات حيث تتحقق المتباينة: $x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$.

Question 2.2.90.

Solve the inequality $x^2-16\leq 0$. A) $[-4,4]$
B) $(4,\infty)$
C) $(-\infty,4)$
D) $(-4,4)$
E) None of these choices

Answer: A) $[-4,4]$
Rewrite as $(x-4)(x+4)\leq 0$.
This inequality holds when $x\in[-4,4]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-4)(x+4)\leq 0$.
هذه المتباينة تتحقق عندما يكون $x\in[-4,4]$.

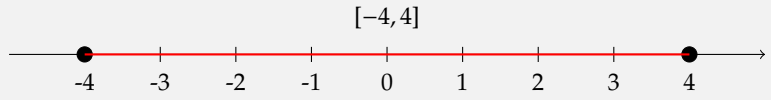


Figure 11. The closed interval $[-4,4]$.

Question 2.2.91.

Find the solution set of $x^2-36\leq 0$. A) $(-6,6)$
B) $(6,\infty)$
C) $(-\infty,6)$
D) $[-6,6]$
E) None of these choices

Answer: D) $[-6,6]$
Rewrite as $(x-6)(x+6)\leq 0$.
The inequality holds for $x\in[-6,6]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-6)(x+6)\leq 0$.
المتباينة تتحقق عندما يكون $x\in[-6,6]$.

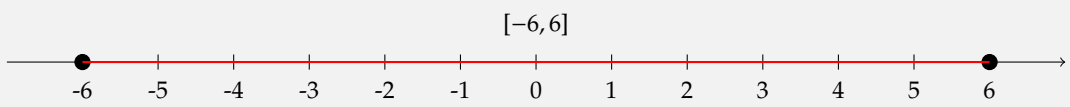


Figure 12. The closed interval $[-6, 6]$.

Question 2.2.92.

Determine the solution set of $x^2 + x - 6 \geq 0$. A) $(-\infty, 3] \cup [2, \infty)$
B) $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
C) $(-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$
D) $[-2, 3]$
E) None of these choices

Answer: B) $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
Rewrite as $(x + 3)(x - 2) \geq 0$.
The inequality holds for $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x + 3)(x - 2) \geq 0$.
المتباينة تتحقق عندما يكون $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

Figure 13. The union of intervals $(-\infty, -3]$ and$[2, \infty)$.

Question 2.2.93.

Solve the inequality $x^2 - 5x + 6 > 0$. A) $(2, 3)$
B) $(2, \infty)$
C) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
D) $[-3, 3]$
E) None of these choices

Answer: C) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
Rewrite as $(x - 2)(x - 3) > 0$.
The inequality holds for $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x - 2)(x - 3) > 0$.
المتباينة تتحقق عندما يكون $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Figure 14. The union of intervals $(-\infty, 2)$ and$(3, \infty)$.

Question 2.2.94.

Find the solution set of the inequality $x^2 + 2x \leq 0$. A) $[-2, 0]$
B) $(-\infty, 0)$
C) $(0, 2)$
D) $(0, \infty)$
E) None of these choices

Answer: A) $[-2, 0]$
Rewrite as $x(x + 2) \leq 0$.
The inequality holds for $x \in [-2, 0]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $x(x + 2) \leq 0$.
المتباينة تتحقق عندما يكون $x \in [-2, 0]$.

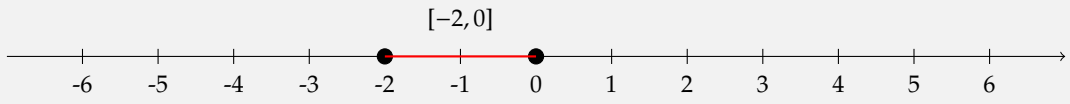


Figure 15. The closed interval $[-2, 0]$.

Question 2.2.95.

Solve the inequality $x^2 - 2x - 8 \geq 0$. A) $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$
B) $(2, 3)$
C) $(-3, 3)$
D) $[-3, 3]$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$
Factor: $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$.
Boundary points: $x = -2$ and $x = 4$.
Test intervals: inequality holds in $(-\infty, -2]$ and $[4, \infty)$. Solution: $x \in (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x + 2)(x - 4) \geq 0$.
النقاط الحدودية: $x = -2$ و $x = 4$.
بعد اختبار الفترات، المتباينة تتحقق في $(-\infty, -2]$ و $[4, \infty)$.

Question 2.2.96.

Solve the inequality $x^2 + 4x - 12 < 0$. A) $(-4, 3)$
B) $(-6, 2)$
C) $(0, 2)$
D) $[-4, 3]$
E) None of these choices

Answer: B) $(-6, 2)$
Factor: $x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$.
Boundary points: $x = -6$ and $x = 2$.
In order to determine the sign of the inequality, we check the value of the inequality at different points. lefts from -6, rights from 2 and between -6 and 2.
Test intervals: inequality holds in $(-6, 2)$. Solution: $x \in (-6, 2)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x + 6)(x - 2) < 0$.
النقاط الحدودية: $x = -6$ و $x = 2$.
المتباينة تتحقق في الفترة $(-6, 2)$. لتحديد اشارة المتباينة نجرب قيمة المتباينة عند نقاط مختلفة. مثلا يسار -6 و اكبر من 2 وبين هذين العددين.

Question 2.2.97.

Determine the solution set for $x^2 - x - 12 \leq 0$. A) $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$
B) $(0, 3]$
C) $(-3, 4)$
D) $[-3, 4]$
E) None of these choices

Answer: C) $[-3, 4]$
Factor: $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$.
Boundary points: $x = 4$ and $x = -3$.
Test intervals: inequality holds in $[-3, 4]$. Solution: $x \in [-3, 4]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x - 4)(x + 3) \leq 0$.
النقاط الحدودية: $x = 4$ و $x = -3$.
المتباينة تتحقق في الفترة $[-3, 4]$.

Question 2.2.98.

Solve the inequality $2x^2 - 5x \leq 3$. A) $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
B) $(1, 4]$
C) $[-1/2, 3]$
D) $(-1, 3]$
E) None of these choices

Answer: C) $[-1/2, 3]$
Rewrite as $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$.
Factor: $(2x + 1)(x - 3) \leq 0$.
Boundary points: $x = -\frac{1}{2}$ and $x = 3$.
Test intervals: inequality holds in $[-1/2, 3]$. Solution: $x \in [-1/2, 3]$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(2x + 1)(x - 3) \leq 0$.
النقاط الحدودية: $x = -\frac{1}{2}$ و $x = 3$.
المتباينة تتحقق في الفترة $[-1/2, 3]$.

Question 2.2.99.

Find the solution set for $3x^2 + x - 4 > 0$. A) $(-\infty, -4/3) \cup (1, \infty)$
B) $(0, 4)$
C) $(4, \infty)$
D) $(-1, 1)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, -4/3) \cup (1, \infty)$
Rewrite as $3x^2 + x - 4 > 0$.
Factor: $(3x + 4)(x - 1) > 0$.
Boundary points: $x = 1$ and $x = -\frac{4}{3}$.
Test intervals: inequality holds in $(-\infty, -4/3) \cup (1, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(3x + 4)(x - 1) > 0$.
النقاط الحدودية: $x = 1$ و $x = -\frac{4}{3}$.
المتباينة تتحقق في $(-\infty, -4/3) \cup (1, \infty)$.

Question 2.2.100.

Solve the inequality $x^2 + 4x + 4 \geq 0$. A) $(-\infty, \infty)$
B) $(0, \infty)$
C) $\{-2\}$
D) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, \infty)$
Factor as $(x + 2)^2 \geq 0$.
Since $(x + 2)^2$ is always non-negative, the inequality holds for all real values of x. Solution: $x \in (-\infty, \infty)$.

نحلل كالتالي $(x + 2)^2 \geq 0$.
بما أن $(x + 2)^2$ دائمًا غير سالب، فإن المتباينة تتحقق لجميع قيم x . الحل هو $x \in (-\infty, \infty)$.

Question 2.2.101.

Solve the inequality $x^2 + 1 < 0$. A) $(-\infty, \infty)$
B) $\emptyset$
C) $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$
E) None of these choices

Answer: B) $\emptyset$
Rewrite as $x^2 < -1$.
Since x^2 is always non-negative, it can never be less than -1. Therefore, there is no solution. Solution: $\emptyset$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $x^2 < -1$.
بما أن x^2 دائمًا غير سالب، فلا يمكن أن يكون أقل من -1 . وبالتالي، لا يوجد حل. الحل هو $\emptyset$.

Question 2.2.102.

Find the solution set for $x^2 - 6x + 9 \leq 0$. A) $(-\infty, \infty)$
B) $\{3\}$
C) $[3, 3]$
D) $[3, 3) \cup (3, 3]$
E) None of these choices

Answer: B) {3}
Rewrite as $(x-3)^2 \leq 0$.
Since the square of any real number is non-negative, $(x-3)^2 = 0$ only when $x = 3$. Solution: {3}.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-3)^2 \leq 0$.
بما أن مربع أي عدد حقيقي غير سالب، فإن $(x-3)^2 = 0$ فقط عندما $x = 3$. الحل هو {3} .

Question 2.2.103.

Determine the solution set of $x^2 - 4x + 4 > 0$. A) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
B) $(0, \infty)$
C) $(2, \infty)$
D) $[2, \infty)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
Rewrite as $(x-2)^2 > 0$.
Since $(x-2)^2 = 0$ only when $x = 2$, the inequality holds for all $x \neq 2$. Solution: $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-2)^2 > 0$.
بما أن $(x-2)^2 = 0$ فقط عندما $x = 2$ ، فإن المتباينة تتحقق لجميع $x \neq 2$. الحل هو $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Question 2.2.104.

Solve the inequality $x^2 - 1 \geq 0$. A) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
B) $(-\infty, \infty)$
C) $[-1, 1]$
D) $(0, \infty)$
E) None of these choices

Answer: A) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Rewrite as $(x-1)(x+1) \geq 0$.
The boundary points are $x = -1$ and $x = 1$. Testing intervals shows the inequality holds for $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

نعيد كتابة المتباينة كالتالي $(x-1)(x+1) \geq 0$.
النقاط الحدودية هي $x = -1$ و $x = 1$. باختبار الفترات، تتحقق المتباينة عندما $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

2.3. Cubic Equations

2.3.1 Tips for solving Cubic Equations

Solving Cubic Equations To solve a cubic equation of the form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, we can use several methods:

1. **Factorization:** If one root can be guessed, use it to factor the equation.
2. **Cardano's Formula:** For general cases, Cardano's formula can solve any cubic equation.
3. **Numerical Methods:** Methods like Newton can approximate roots.

Each approach depends on the specific form of the cubic equation and may yield real or complex solutions.

حل المعادلات التكعيبية لحل معادلة تكعيبية من الشكل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، يمكننا استخدام عدة طرق:

1 . **التحليل:** إذا أمكن تخمين جذر، يمكن استخدامه لتحليل المعادلة.

2 . **صيغة كاردانو:** لحالات عامة، صيغة كاردانو يمكنها حل أي معادلة تكعيبية.

3 . **الطرق العددية:** مثل طريقة نيوترافسون لتقريب الجذور.

كل طريقة تعتمد على شكل المعادلة التكعيبية وقد تؤدي إلى حلول حقيقية أو معقدة.

2.3.2 Cardano's formula

To solve a general cubic equation of the form

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

we can use Cardano's formula. The solution involves the following steps:

Step 1: Reduce to Depressed Cubic Form

First, divide by a (assuming $a \neq 0$):

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Then, make the substitution $x = y - \frac{b}{3a}$, which removes the quadratic term, resulting in the "depressed" cubic form:

$$y^3 + py + q = 0,$$

where

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{and} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Step 2: Apply Cardano's Formula

For the depressed cubic $y^3 + py + q = 0$, Cardano's formula gives:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

This expression provides one real root. The remaining roots can be found using complex cube roots of unity if required.

Step 3: Interpret the Solutions

The nature of the roots depends on the discriminant $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$:

- If $\Delta > 0$, there is one real root and two complex roots.
- If $\Delta \leq 0$, all roots are real. If $\Delta = 0$, some roots may coincide.

Thus, Cardano's formula provides a general method for solving any cubic equation.

Example 2.3.23 (Simple Depressed Cubic)**.** *Solve the equation:* $y^3 - 15y - 4 = 0$.

For this equation:

$$p = -15, \quad q = -4.$$

Using Cardano's formula:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Substituting $p = -15$ and $q = -4$:

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + 125}} = \sqrt[3]{2 + 11.53} + \sqrt[3]{2 - 11.53}.$$

Evaluating:

$$y \approx \sqrt[3]{13.53} + \sqrt[3]{-9.53} \approx 2.37 - 2.1 = 0.27.$$

Thus, one real root is $y \approx 0.27$.

Example 2.3.24 (Non-Depressed Cubic Equation)**.** *Solve the equation:* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

We reduce this to a depressed cubic by substituting $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, yielding:

$$y^3 + py + q = 0,$$

where $p = 1$ and $q = -6$.
Using Cardano's formula:

$$y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + 0.037}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + 0.037}}.$$

Evaluating:

$$y \approx \text{solution with root approximations.}$$

Thus, one root for x is $x = y + 2$.

Example 2.3.25 (Discriminant Zero (Multiple Real Roots)). *Solve the equation:* $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Solution We substitute $x = y + \frac{3}{3} = y + 1$, resulting in:

$$y^3 = 0.$$

The solution is:

$$y = 0 \Rightarrow x = y + 1 = 1.$$

In this case, all roots are real and equal: $x = 1$.

2.3.3 Exercises for Cubic Equations

Question 2.3.105.

Solve the cubic equation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. A) $x = 1, x = 2, x = 3$
B) $x = 1, x = -2, x = 3$
C) $x = 0, x = 1, x = -3$
D) $x = 3, x = -1, x = 2$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 1, x = 2, x = 3$
Factor the cubic equation:
$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.
Thus, $x = 1$, $x = 2$, and $x = 3$.

نقوم بتحليل المعادلة التكعيبية:
$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.
إذًا، $x = 1$ ، $x = 2$ ، و $x = 3$.

Question 2.3.106.

Solve the cubic equation $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$. A) $x = 2, x = -2, x = 0$
B) $x = 0, x = 2$ (repeated)
C) $x = 0, x = 1, x = 3$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: B) $x = 0, x = 2$ (repeated)
Factor the cubic equation:
$x(x-2)^2 = 0$.
Thus, $x = 0$ and $x = 2$ (repeated root).

نقوم بتحليل المعادلة التكعيبية:
$x(x-2)^2 = 0$.
إذًا، $x = 0$ و $x = 2$ (جذر متكرر).

Question 2.3.107.

Solve the cubic equation $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$. A) $x = -3, x = -2, x = 2$
B) $x = 2, x = -1, x = 3$
C) $x = -3, x = 2, x = 2$
D) No real solution
E) None of these choices

Answer: C) $x = -3, x = 2, x = 2$
Factor by grouping:
$x^2(x+3) - 4(x+3) = 0 \Rightarrow (x^2-4)(x+3) = 0.$
Factor further: $(x-2)(x+2)(x+3) = 0.$
Thus, $x = -3, x = 2.$

نقوم بتحليل عن طريق التجميع:
$x^2(x+3) - 4(x+3) = 0 \Rightarrow (x^2-4)(x+3) = 0$.
نحلل أكثر: $(x-2)(x+2)(x+3) = 0$.
إذًا $x = -3; x = 2$.

Question 2.3.108.

Solve the equation $|x^3 - x^2 - 6x| = 0$. A) $x = 3, x = 0, x = -2$
B) $x = 0, x = 3$
C) $x = 0, x = -2$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 3, x = 0, x = -2$
Solve inside the absolute value:
$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-3)(x+2) = 0.$
Thus, $x = 0$, $x = 3$, or $x = -2$.

نحل داخل القيمة المطلقة:
$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-3)(x+2) = 0$.
إذًا، $x = 0; x = 3$ ، أو $x = -2$.

Question 2.3.109.

Solve the cubic equation $x^3 - 27 = 0$. A) $x = 3$
B) $x = -3$
C) $x = 9$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 3$
Factor the difference of cubes:
$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9) = 0.$
Thus, $x = 3$.

نحلل الفرق بين المكعبين:
$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9) = 0$.
إذًا، $x = 3$.

Question 2.3.110.

Solve the cubic equation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. A) $x = -1, x = 1$
B) $x = 0, x = 1$
C) $x = -1$ and complex roots
D) $x = 2, x = -2$
E) None of these choices

Answer: C) $x = -1$ and complex roots
Factor the cubic equation:
$(x + 1)(x^2 + 1) = 0$.
Thus, $x = -1$ and complex roots from $x^2 + 1 = 0$.

نحلل المعادلة التكعيبية:
$(x + 1)(x^2 + 1) = 0$.
إذًا، $x = -1$ وجذور معقدة من $x^2 + 1 = 0$.

Question 2.3.111.

Solve the cubic equation $x^3 - 12x + 16 = 0$. A) $x = 4, x = -2$
B) $x = 2, x = 4$
C) $x = 2$ (repeated)
D) No solution
E) None of these choices

Answer: C) $x = 2$ (repeated)
Solve by factoring:
$(x - 2)^2(x + 2) = 0$.
Thus, $x = 2$ (repeated) or $x = -2$.

نقوم بتحليل المعادلة:
$(x - 2)^2(x + 2) = 0$.
إذًا، $x = 2$ (جذر متكرر) أو $x = -2$.

Question 2.3.112.

Solve the equation $|x^3 - 4x| = 0$. A) $x = 2, x = -2, x = 0$
B) $x = 3, x = -3$
C) $x = 0$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 2, x = -2, x = 0$
Solve inside the absolute value:
$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$.
Thus, $x = 0$, $x = 2$, or $x = -2$.

نحل داخل القيمة المطلقة:
$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$.
إذًا، $x = 0$ ، $x = 2$ ، أو $x = -2$.

Question 2.3.113.

Solve the cubic equation $x^3 + 8 = 0$. A) $x = -2$
B) $x = 2$

C) $x = -3$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = -2$
Factor the sum of cubes:
$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$.
Thus, $x = -2$.

نقوم بتحليل مجموع المكعبات:
$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$.
إذًا، $x = -2$.

Question 2.3.114.

Solve the cubic equation $x^3 - 64 = 0$. A) $x = 4$
B) $x = -4$
C) $x = 8$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $x = 4$
Factor the difference of cubes:
$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$.
Thus, $x = 4$.

نحلل الفرق بين المكعبين:
$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$.
إذًا، $x = 4$.

Chapter 3

Expressions involving Lines and Polynomials

3.1. Line Equations

3.1.1 Short Review of Line equations

1. Slope-Intercept Form
The slope-intercept form of a line is given by: $y = mx + b$ where m is the slope and b is the y-intercept.

2. Point-Slope Form
The point-slope form is: $y - y_1 = m(x - x_1)$ where (x_1, y_1) is a known point on the line and m is the slope.

3. General Form
The general form of a line is: $Ax + By + C = 0$ where A, B, and C are constants, and A and B are not both zero.

4. Horizontal and Vertical Lines
Horizontal lines have the form $y = c$ (slope $m = 0$), while vertical lines have the form $x = c$ (undefined slope).

1 . **صيغة الميل ـ المقطع**
صيغة الميلالمقطع للخط هي: $y = mx + b$ حيث m هو الميل و b هو المقطع الصادي.

2 . **صيغة النقطة ـ الميل**
صيغة النقطةالميل هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث (x_1, y_1) نقطة معلومة على الخط و m هو الميل.

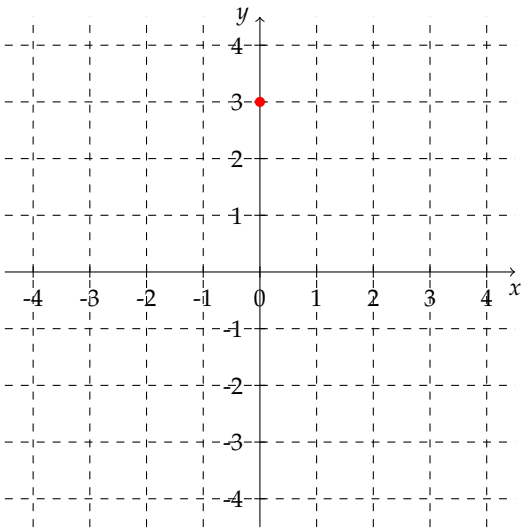
3 . **الصيغة العامة**
الصيغة العامة للخط هي: $Ax + By + C = 0$ حيث A ، B و C ثوابت و A و B ليسا كلاهما صفر.

4 . **الخطوط الأفقية والرأسية**
الخطوط الأفقية تأخذ الشكل $y = c$ (بميل $m = 0$)، بينما الخطوط الرأسية تأخذ الشكل $x = c$ (بميل غير معرف).

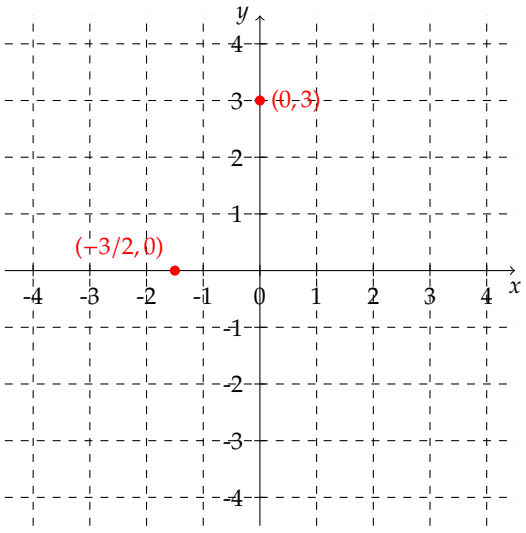
Here is an example of how do we draw a line equation:

Example 3.1.26. *Steps to Draw the Line:* $y = 2x + 3$

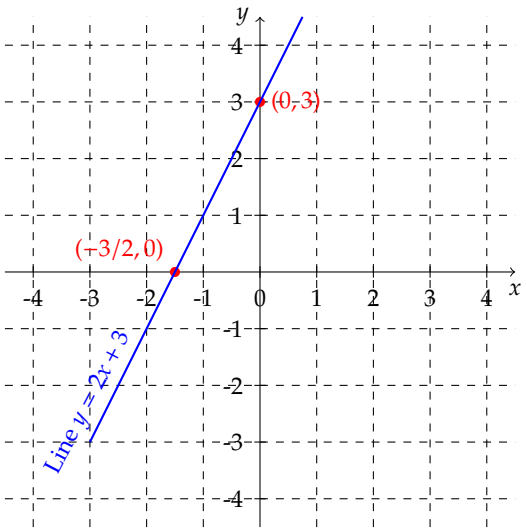
Step 1: Identify the y-intercept. The y-intercept is where $x = 0$. For the equation $y = 2x + 3$, the y-intercept is $(0, 3)$.



Step 2: Identify the x-intercept. The x-intercept is where $y = 0$. Hence $x = -3/2$. Starting from $(0, 3)$, the next point will be $(-3/2, 0)$.



Step 3: Draw the Line. Join these points $(0, 3)$, the next point will be $(-3/2, 0)$.



Slope (m)

The slope of the line is the coefficient of x, which is 2. The slope indicates the "rise over run":

$$\text{Slope} = 2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

This means that for every unit increase in x, y increases by 2 units.

y-Intercept (b)

The y-intercept is the constant term, which is 3. The y-intercept is the point where the line crosses the y-axis:

$$y = 3 \quad \text{at} \quad (0, 3)$$

This means that when $x = 0$, $y = 3$.

x-Intercept

To find the x-intercept, set $y = 0$ and solve for x:

$$0 = 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Thus, the x-intercept is:

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right).$$

Line Characteristics.

- The slope is positive, so the line is increasing (rising from left to right).
- The line is linear and straight with no curves or turning points.
- The domain is all real numbers $(-\infty, \infty)$.
- The range is also all real numbers $(-\infty, \infty)$.

Rules for Parallel and Perpendicular Lines

1. **Parallel Lines**: Two lines are parallel if their slopes are equal. For lines with equations $y = m_1x + b_1$ and $y = m_2x + b_2$, the lines are parallel if $m_1 = m_2$.

- **Example**: Consider the lines $y = 2x + 3$ and $y = 2x - 4$. Both lines have the same slope $m = 2$, so they are parallel.

2. **Perpendicular Lines**: Two lines are perpendicular if the product of their slopes is -1. For lines with slopes m_1 and m_2, they are perpendicular if $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- **Example**: Consider the lines $y = \frac{1}{2}x + 1$ and $y = -2x + 3$. The slopes are $m_1 = \frac{1}{2}$ and $m_2 = -2$. Since $\frac{1}{2} \times -2 = -1$, these lines are perpendicular.

These rules help determine the relationships between lines on a plane based on their slopes.

قواعد الخطوط المتوازية والمتعامدة

1 . **الخطوط المتوازية** : يكون الخطان متوازيين إذا كانت ميلهما متساوية. للخطين بمعادلات $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ ، يكونان متوازيين إذا $m_1 = m_2$.

- **مثال** : لنفترض الخطين $y = 2x + 3$ و $y = 2x - 4$. كلا الخطين لهما نفس الميل $m = 2$ ، لذا هما متوازيان.

2 . **الخطوط المتعامدة** : يكون الخطان متعامدين إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 . للخطين بميلي m_1 و m_2 ، يكونان متعامدين إذا $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- **مثال** : لنفترض الخطين $y = \frac{1}{2}x + 1$ و $y = -2x + 3$. الميول هي $m_1 = \frac{1}{2}$ و $m_2 = -2$. بما أن $\frac{1}{2} \times -2 = -1$ ، هذان الخطان متعامدان.

تساعد هذه القواعد في تحديد العلاقة بين الخطوط على المستوى بناءً على ميلهما.

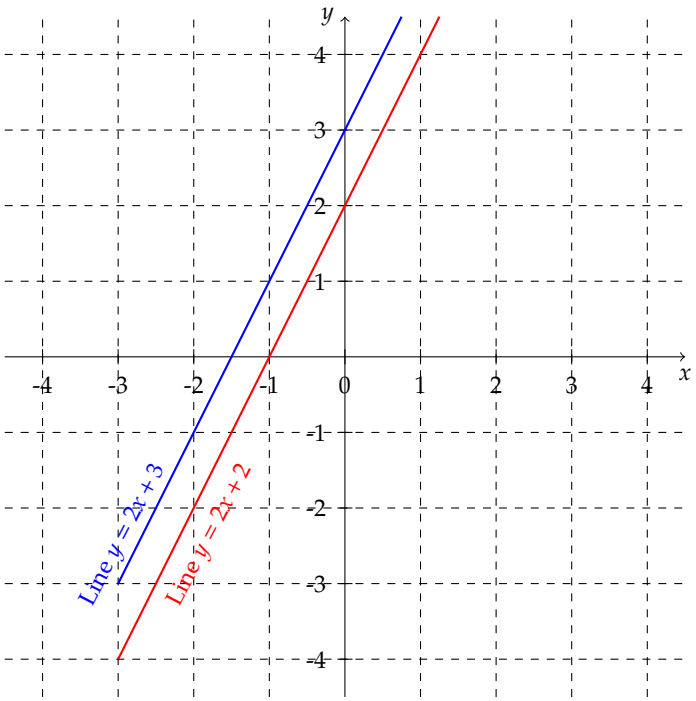


Figure 16. Parallel lines

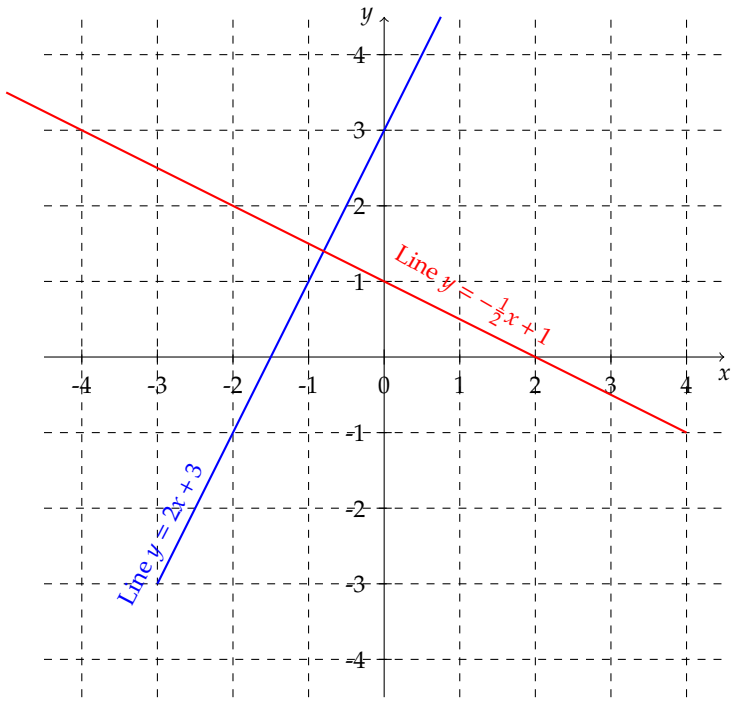


Figure 17. Perpendicular lines

3.1.2 Exercises about Line Equations

Question 3.1.115.

The slope of the line perpendicular to $y = 3x - 5$ is A) $\frac{1}{3}$
B) -3
C) $-\frac{1}{3}$
D) 3
E) None of these choices

Answer: C) $-\frac{1}{3}$
The slope of a line perpendicular to another line is the negative reciprocal of the slope of the original line.

ميل المستقيم المتعامد مع مستقيم آخر هو مقلوب الميل الأصلي مضروبًا في سالب واحد.

Question 3.1.116.

The equation of the line passing through the point $(2, 3)$ and having a slope of 4 is
A) $y = 4x - 5$
B) $y = 4x + 5$
C) $y = 4x + 3$
D) $y = x + 4$
E) None of these choices

Answer: A) $y = 4x - 5$
To find the equation of the line, use the point-slope form: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

لإيجاد معادلة المستقيم، نستخدم صيغة النقطة والميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Question 3.1.117.

If the line $y = 2x + 1$ is shifted 3 units up, the equation of the new line is A) $y = 2x + 4$
B) $y = 2x - 2$
C) $y = 2x + 1$
D) $y = 2x + 7$
E) None of these choices

Answer: D) $y = 2x + 4$
Shifting a line up by 3 units increases the y-intercept by 3.

تحريك المستقيم لأعلى بمقدار 3 وحدات يزيد نقطة تقاطع y بمقدار 3 .

Question 3.1.118.

The slope of a line parallel to $4x - 3y = 12$ is A) $\frac{4}{3}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $-\frac{4}{3}$
D) 3
E) None of these choices

Answer: A) $\frac{4}{3}$
Convert the line to slope-intercept form to find the slope of the original line: $y = mx + b$. The slope of a parallel line is the same.

لإيجاد ميل المستقيم الموازي، نحول معادلة المستقيم إلى صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$ ، ويكون الميل للمستقيم الموازي هو نفسه.

Question 3.1.119.

The equation of the line passing through $(0, 5)$ and perpendicular to $y = -2x + 3$ is
A) $y = \frac{1}{2}x + 5$
B) $y = \frac{1}{2}x$
C) $y = -2x + 5$
D) $y = 2x + 5$
E) None of these choices

Answer: D) $y = 2x + 5$
The slope of the perpendicular line is the negative reciprocal of -2, which is 2.

ميل المستقيم المتعامد هو مقلوب الميل الأصلي مضروبًا في سالب واحد.

Question 3.1.120.

The slope of the tangent line to the curve $y = x^2 + 2x + 1$ at $x = 1$ is A) 0
B) 4
C) 2
D) 3
E) None of these choices

Answer: B) 4
The slope of the tangent line is the derivative of the function at $x = 1$.

ميل المماس هو مشتق الدالة عند $x = 1$.

Question 3.1.121.

The slope of the line given by the equation $3x + 2y = 6$ is A) $-\frac{3}{2}$
B) $\frac{3}{2}$
C) $\frac{2}{3}$
D) 3
E) None of these choices

Answer: A) $-\frac{3}{2}$
Convert the equation to slope-intercept form $y = mx + b$, and extract the slope.

نحول معادلة المستقيم إلى صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$ ، ثم نستخرج الميل.

Question 3.1.122.

The slope of the line that passes through the points $(2, 5)$ and $(4, 9)$ is A) 2
B) 4
C) $\frac{1}{2}$
D) 5
E) None of these choices

Answer: A) 2
The slope between two points is given by $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

الميل بين نقطتين يُعطى بالعلاقة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Question 3.1.123.

The equation of the line passing through $(1,2)$ and parallel to $y = 3x + 4$ is A) $y = 3x - 1$
B) $y = 3x + 2$
C) $y = -3x + 2$
D) $y = 2x + 3$
E) None of these choices

Answer: A) $y = 3x - 1$
A parallel line has the same slope, and the line passes through the point $(1,2)$.

المستقيم الموازي له نفس الميل ويمر عبر النقطة $(1,2)$.

Question 3.1.124.

The slope of the line tangent to the curve $y = \frac{1}{x}$ at $x = 1$ is A) -1
B) 1
C) -2
D) 2
E) None of these choices

Answer: A) -1
The slope of the tangent line is the derivative of the function at $x = 1$.

ميل المماس هو مشتق الدالة عند $x = 1$.

Question 3.1.125.

The equation of the line passing through the points $(1,2)$ and $(3,6)$ is A) $y = 2x + 0$
B) $y = 2x - 2$
C) $y = x + 1$
D) $y = 3x - 4$
E) None of these choices

Answer: A) $y = 2x + 0$
To find the equation of the line, use the slope formula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ to find the slope m, then apply the point-slope form: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

لإيجاد معادلة المستقيم نستخدم صيغة الميل: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ لإيجاد الميل m ، ثم نطبق صيغة النقطة والميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Question 3.1.126.

The equation of the line passing through the points $(4,5)$ and $(6,9)$ is A) $y = 2x - 3$
B) $y = x + 1$
C) $y = 2x - 5$
D) $y = 3x - 4$
E) None of these choices

Answer: A) $y = 2x - 3$
To find the equation of the line, first calculate the slope: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9-5}{6-4} = 2$. Then, apply the point-slope form $y - y_1 = m(x - x_1)$ and simplify to get $y = 2x - 3$.

لإيجاد معادلة المستقيم، نبدأ بحساب الميل: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9-5}{6-4} = 2$. ثم نطبق صيغة النقطة والميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$ لنحصل على $y = 2x - 3$.

Question 3.1.127.

The slope of the line passing through the points $(2,-3)$ and $(5,1)$ is A) -4
B) 2
C) $\frac{4}{3}$
D) 1
E) None of these choices

Answer: B) 2
The slope is calculated using the formula: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{4}{3}$. Therefore, the slope is 2.

الميل يُحسب باستخدام الصيغة: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{4}{3}$. وبالتالي الميل هو 2 .

Question 3.1.128.

The line parallel to $y = 3x + 4$ and passing through the point $(2,-1)$ has the equation A) $y = 3x + 2$
B) $y = 3x - 7$
C) $y = -3x - 5$
D) $y = 2x + 3$
E) None of these choices

Answer: B) $y = 3x - 7$
Since the line is parallel, it has the same slope, $m = 3$. Use the point-slope form $y - y_1 = m(x - x_1)$ with $(x_1, y_1) = (2,-1)$: $y + 1 = 3(x - 2)$. Simplify to get $y = 3x - 7$.

بما أن المستقيمين متوازيان، لهما نفس الميل $m = 3$. نستخدم صيغة النقطة والميل $y - y_1 = m(x - x_1)$ مع $(x_1, y_1) = (2,-1)$. بعد التبسيط، نحصل على $y = 3x - 7$.

Question 3.1.129.

What is the distance from the point $(1,2)$ to the line $3x-4y+5=0$? A) 5
B) $\frac{7}{5}$
C) $\frac{5}{4}$
D) 0
E) None of these choices

Answer: D) 0
The distance from a point (x_1, y_1) to a line $Ax+By+C=0$ is given by the formula:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Substitute $A=3$, $B=-4$, $C=5$, $x_1=1$, and $y_1=2$:

$$d = \frac{|3(1)-4(2)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3-8+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|0|}{5} = 0.$$

This means that the point is on the line.

المسافة من النقطة (x_1, y_1) إلى الخط $Ax+By+C=0$ تعطى بالصيغ:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

نقوم بالتعويض بالقيم: $A=3$ ، $B=-4$ ، $C=5$ ، $x_1=1$ و $y_1=2$:

$$d = \frac{|3(1)-4(2)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3-8+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|0|}{5} = 0.$$

النقطة تنتمي للمستقيم.

Question 3.1.130.

The point of intersection of the lines $y=2x+1$ and $y=-3x+6$ is A) $(1,3)$
B) $(2,4)$
C) $(1,2)$
D) $(5,3)$
E) None of these choices

Answer: A) $(1,3)$
To find the point of intersection, solve the system of equations:

$$2x+1=-3x+6.$$

Add $3x$ to both sides:

$$5x+1=6 \quad \Rightarrow \quad 5x=5 \quad \Rightarrow \quad x=1.$$

Substitute $x=1$ into either equation (e.g., $y=2x+1$):

$$y=2(1)+1=3.$$

Thus, the point of intersection is $(1,3)$.

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين، نحل نظام المعادلتين:

$$2x+1=-3x+6.$$

نضيف $3x$ إلى كلا الطرفين:

$$5x+1=6 \quad \Rightarrow \quad 5x=5 \quad \Rightarrow \quad x=1.$$

نقوم بالتعويض بـ $x=1$ في أي من المعادلتين (على سبيل المثال: $y=2x+1$):

$$y=2(1)+1=3.$$

إذن، نقطة التقاطع هي $(1,3)$.

Question 3.1.131.

The midpoint of the line segment joining the points $(4,-2)$ and $(8,6)$ is A) $(6,2)$
B) $(2,0)$

C) $(7,1)$
D) $(5,4)$
E) None of these choices

Answer: A) $(6,2)$
The formula for the midpoint is:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Substituting the coordinates of the points $(4,-2)$ and $(8,6)$:

$$\left(\frac{4+8}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (6,2).$$

صيغة نقطة المنتصف هي:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

نقوم بالتعويض بإحداثيات النقطتين $(4,-2)$ و $(8,6)$:

$$\left(\frac{4+8}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (6,2).$$

Question 3.1.132.

The equation of a line passing through the point $(2,-3)$ and perpendicular to the line $5x+6y=7$ is A) $y=\frac{6}{5}x-3$
B) $y=-\frac{5}{6}x+2$
C) $y=\frac{6}{5}x-\frac{27}{5}$
D) $y=-\frac{6}{5}x-4$
E) None of these choices

Answer:C) $y=\frac{6}{5}x-\frac{27}{5}$
Rewrite the line $5x+6y=7$ in slope-intercept form:

$$y=-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6}.$$

The slope of the given line is $-\frac{5}{6}$, so the slope of the perpendicular line is the negative reciprocal, $m=\frac{6}{5}$.
Using the point-slope form with $(2,-3)$, we get:

$$y+3=\frac{6}{5}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{6}{5}x-\frac{27}{5}.$$

نقوم بتحويل المعادلة $5x+6y=7$ إلى الصيغة الميلية:

$$y=-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6}.$$

ميل الخط المعطى هو $-\frac{5}{6}$ ، وبالتالي ميل المستقيم العمودي هو مقلوبه السالب، $m=\frac{6}{5}$. نستخدم صيغة النقطة والميل مع النقطة $(2,-3)$:

$$y+3=\frac{6}{5}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{6}{5}x-4.$$

3.2. Polynomials and their properties

3.2.1 Properties of polynomials

Properties of Polynomials

A polynomial in one variable x of degree n has the general form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

where $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ are constants, and $a_n \neq 0$.

1. **Degree**: The degree of a polynomial is the highest power of the variable. For example, $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 5$ has degree 4.
2. **Leading Coefficient**: The coefficient of the term with the highest degree is called the leading coefficient. For $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 5$, the leading coefficient is 3.
3. **Roots**: The values of x that satisfy $f(x) = 0$ are the roots or zeros of the polynomial. A polynomial of degree n has at most n roots.
4. **End Behavior**: The end behavior of a polynomial depends on the degree and the leading coefficient. For even degrees, both ends go in the same direction; for odd degrees, they go in opposite directions.

These properties are essential for understanding the behavior and structure of polynomial functions.

خصائص كثيرات الحدود

كثير الحدود في متغير واحد x من الدرجة n يكون له الشكل العام:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ثوابت و $a_n \neq 0$.

1. **الدرجة** : درجة كثير الحدود هي أعلى قوة للمتغير. على سبيل المثال، $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 5$ لها درجة 4.
2. **المعامل الرئيسي** : هو معامل الحد الذي يحتوي على أعلى درجة ويُسمى المعامل الرئيسي. في $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 5$ ، 3 المعامل الرئيسي هو.
3. **الجذور** : قيم x التي تحقق $f(x) = 0$ تسمى جذور أو أصفار كثير الحدود. لكثير حدود من الدرجة n ما يصل إلى n جذر.
4. **سلوك النهايات** : يعتمد سلوك نهايات كثير الحدود على الدرجة والمعامل الرئيسي. في الدرجات الزوجية، تتجه النهايات في نفس الاتجاه؛ وفي الدرجات الفردية، تتجه النهايات في اتجاهين متعاكسين.

تعد هذه الخصائص أساسية لفهم سلوك وهيكل دوال كثيرات الحدود.

3.2.2 Polynomial Graphs by Degree

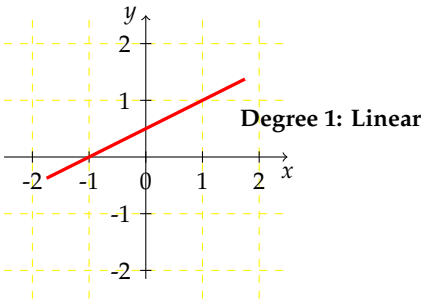


Figure 18. A linear polynomial is straight line, it has one root at most, it have constant rate of change, it shows no concavity.

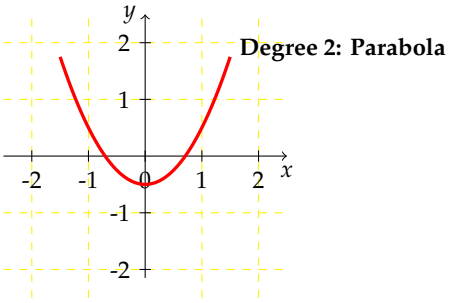


Figure 19. A quadratic polynomial is a parabola, it has up to two roots, it has a variable rate of change, and it shows concavity (either upward or downward).

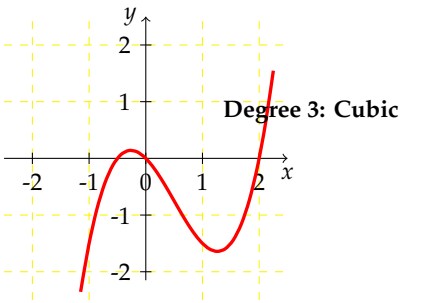


Figure 20. A cubic polynomial is an S-shaped curve (or sometimes just one bend), it has up to three roots, it has a variable rate of change, and it exhibits points of inflection (changing concavity).

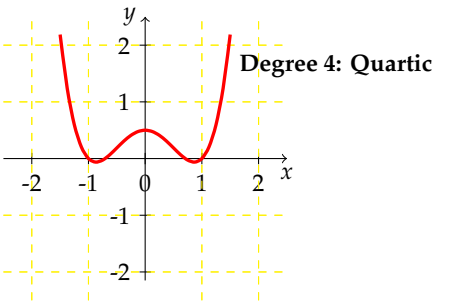


Figure 21. A polynomial of degree 4 is a W-shaped or M-shaped curve (or a smoother variant of these shapes), it has up to four roots, it has a variable rate of change, and it exhibits concavity changes with up to three turning points.

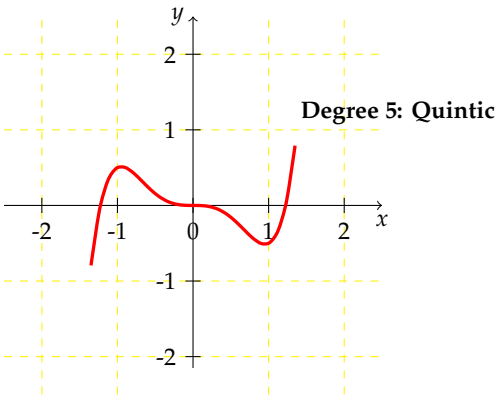


Figure 22. A polynomial of degree 5 is an oscillating curve (often with an "S" shape and additional bends), it has up to five roots, it has a variable rate of change, and it exhibits inflection points with up to four turning points and changing concavity.

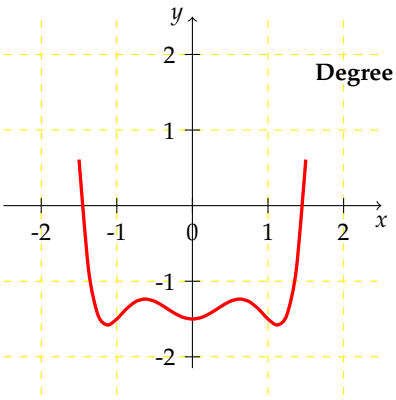


Figure 23. A polynomial of degree 6 is a wave-like curve (often with an "M" or "W" shape and additional oscillations), it has up to six roots, it has a variable rate of change, and it exhibits multiple concavity changes with up to five turning points and inflection points.

3.2.3 Exercises on polynomials

Question 3.2.133.

Is the expression $3x^2 - 4x + 7$ a polynomial?
A) Yes
B) No
C) Only when $x > 0$
D) Only when $x \neq 0$
E) None of these choices

Answer: A) Yes
The expression is a polynomial because it consists of terms with non-negative integer exponents and constant coefficients.

التعبير هو كثير حدود لأنه يتكون من حدود تحتوي على أسس صحيحة غير سالبة ومعاملات ثابتة.

Question 3.2.134.

Is the expression $\frac{1}{x} + 2x^2 - 5$ a polynomial?
A) Yes
B) No
C) Only when $x > 0$
D) Only when $x \neq 0$
E) None of these choices

Answer: B) No
The expression is not a polynomial because $\frac{1}{x}$ involves a negative exponent, which is not allowed in polynomials.

التعبير ليس كثير حدود لأن $\frac{1}{x}$ يحتوي على أس سالب، وهذا غير مسموح في كثيرات الحدود.

Question 3.2.135.

Is the expression $x^3 - 2\sqrt{x} + 5$ a polynomial?
A) Yes
B) No
C) Only when $x > 0$
D) Only when $x \neq 0$
E) None of these choices

Answer: B) No
The expression is not a polynomial because $\sqrt{x}$ involves a fractional exponent, which is not allowed in polynomials.

التعبير ليس كثير حدود لأن $\sqrt{x}$ يحتوي على أس كسري، وهذا غير مسموح في كثيرات الحدود.

Question 3.2.136.

Is the expression $x^2 - 4x + 7$ a polynomial?
A) Yes
B) No
C) Only when $x \neq 0$
D) Only when $x > 0$
E) None of these choices

Answer: A) Yes
The expression is a polynomial because all terms have non-negative integer exponents.

التعبير هو كثير حدود لأن جميع الحدود لها أسس صحيحة غير سالبة.

Question 3.2.137.

Is the expression $x^{-3} + 4x^2 - 7$ a polynomial?
A) Yes
B) No
C) Only when $x > 0$
D) Only when $x \neq 0$
E) None of these choices

Answer: B) No
The expression is not a polynomial because x^{-3} involves a negative exponent, which is not allowed in polynomials.

التعبير ليس كثير حدود لأن x^{-3} يحتوي على أس سالب، وهذا غير مسموح في كثيرات الحدود.

Question 3.2.138.

What is the degree of the polynomial $3x^4 - 5x^2 + 2x + 7$?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) None of these choices

Answer: D) 4
The degree of a polynomial is the highest exponent of the variable. Here, the highest exponent is 4, so the degree is 4.

درجة كثير الحدود هي أعلى أس في المتغير. هنا، أعلى أس هو 4 ، لذلك درجة كثير الحدود هي 4 .

Question 3.2.139.

What is the leading term of the polynomial $2x^3 - 4x^2 + 6x - 8$?
A) $2x^3$
B) $-4x^2$
C) $6x$
D) -8
E) None of these choices

Answer: A) $2x^3$
The leading term is the term with the highest degree. Here, $2x^3$ has the highest degree of 3, so it is the leading term.

الحد الرائد هو الحد الذي له أعلى درجة. هنا، الحد $2x^3$ له أعلى درجة وهي 3 ، لذلك هو الحد الرائد.

Question 3.2.140.

What is the degree of the polynomial $-7x^5 + 4x^3 - x + 1$?
A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) None of these choices

Answer: C) 5
The degree of the polynomial is determined by the highest exponent, which is 5.

درجة كثير الحدود تُحدد بواسطة أعلى أس، وهو هنا 5 .

Question 3.2.141.

What is the leading term of the polynomial $x^6 - 9x^4 + 3x^2 - 5$?
A) x^6
B) $-9x^4$
C) $3x^2$
D) -5
E) None of these choices

Answer: A) x^6
The leading term is the term with the highest degree, which in this case is x^6.

الحد الرائد هو الحد الذي له أعلى درجة، وفي هذه الحالة هو x^6 .

Question 3.2.142.

What is the degree and leading term of the polynomial $5x^7 + 2x^4 - 3x + 9$?
A) Degree: 7, Leading term: $5x^7$
B) Degree: 4, Leading term: $2x^4$
C) Degree: 7, Leading term: $2x^4$
D) Degree: 3, Leading term: $-3x$
E) None of these choices

Answer: A) Degree: 7, Leading term: $5x^7$
The degree is 7 because the highest exponent is 7, and the leading term is $5x^7$ since it has the highest degree.

الدرجة هي 7 لأن أعلى أس هو 7 ، والحد الرائد هو $5x^7$ لأنه الحد ذو أعلى درجة.

Question 3.2.143.

What is the degree of the polynomial $(x-2)(x+3)(x-5)$?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) None of these choices

Answer: C) 3
The degree of a polynomial in factored form is the sum of the degrees of each factor. Each factor here is degree 1, so the total degree is $1+1+1=3$.

درجة كثير الحدود في الصورة المفككة هي مجموع درجات كل عامل. كل عامل هنا من الدرجة 1 ، لذلك الدرجة الإجمالية هي $1+1+1=3$.

Question 3.2.144.

What is the leading term of the polynomial $(x-1)(x+4)(x-6)$?
A) x^3
B) $-x^3$
C) $4x^2$
D) x^2
E) None of these choices

Answer: A) x^3
To find the leading term, multiply the highest degree terms from each factor: $x \cdot x \cdot x = x^3$. Therefore, the leading term is x^3.

لإيجاد الحد الرائد، نضرب الحدود ذات الدرجة الأعلى من كل عامل: $x \cdot x \cdot x = x^3$. لذلك، الحد الرائد هو x^3 .

Question 3.2.145.

What is the degree of the polynomial $(2x-1)(x+5)^2$?
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) None of these choices

Answer: B) 3
The degree is the sum of the degrees of each factor. $(2x-1)$ has degree 1, and $(x+5)^2$ has degree 2, so the total degree is $1+2=3$.

الدرجة هي مجموع درجات كل عامل. العامل $(2x-1)$ من الدرجة 1 ، والعامل $(x+5)^2$ من الدرجة 2 ، لذلك الدرجة الإجمالية هي $1+2=3$.

Question 3.2.146.

What is the leading term of the polynomial $(3x+2)(x-7)^2$?
A) $3x^3$
B) $-3x^3$
C) x^3
D) $9x^3$
E) None of these choices

Answer: A) $3x^3$
To find the leading term, multiply the highest degree terms: $3x \cdot x^2 = 3x^3$. Therefore, the leading term is $3x^3$.

لإيجاد الحد الرائد، نضرب الحدود ذات الدرجة الأعلى: $3x \cdot x^2 = 3x^3$. لذلك، الحد الرائد هو $3x^3$.

Question 3.2.147.

What is the degree and leading term of the polynomial $(-x+4)(x-1)^3$?
A) Degree: 4, Leading term: $-x^4$
B) Degree: 3, Leading term: $-x^3$
C) Degree: 4, Leading term: x^4
D) Degree: 3, Leading term: x^3
E) None of these choices

Answer: A) Degree: 4, Leading term: $-x^4$
The degree is 4 because $(-x+4)$ has degree 1 and $(x-1)^3$ has degree 3, giving $1+3=4$. The leading term is $-x^4$.

الدرجة هي 4 لأن العامل $(-x+4)$ من الدرجة 1 والعامل $(x-1)^3$ من الدرجة 3 ، مما يعطي $1+3=4$. الحد الرائد هو $-x^4$.

Question 3.2.148.

In the polynomial $4x^3-6x^2+2x-5$, what is the coefficient of the x^2 term?
A) 4
B) -6
C) 2
D) -5
E) None of these choices

Answer: B) -6
The coefficient of the x^2 term is -6.

معامل الحد x^2 هو -6 .

Question 3.2.149.

What is the degree of the polynomial $5x^4+3x^2-7x+8$?
A) 1
B) 2
C) 4
D) 5
E) None of these choices

Answer: C) 4
The degree of the polynomial is determined by the highest exponent, which is 4.

درجة كثير الحدود تُحدد بواسطة أعلى أس، وهو هنا 4 .

Question 3.2.150.

What is the leading term of the polynomial $6x^5-4x^3+2x-1$?
A) $6x^5$
B) $-4x^3$
C) $2x$
D) -1
E) None of these choices

Answer: A) $6x^5$
The leading term is the term with the highest degree, which is $6x^5$.

الحد الرائد هو الحد الذي له أعلى درجة، وهو هنا $6x^5$.

Question 3.2.151.

What is the leading coefficient of the polynomial $-7x^6 + 5x^4 - 3x + 9$?
A) -7
B) 5
C) -3
D) 9
E) None of these choices

Answer: A) -7
The leading coefficient is the coefficient of the leading term, which is -7 for the term $-7x^6$.

المعامل الرائد هو معامل الحد الرائد، وهو -7 للحد $-7x^6$.

Question 3.2.152.

What is the degree of the polynomial $3x^7 - 2x^5 + x^3 - 8$?
A) 5
B) 7
C) 3
D) 1
E) None of these choices

Answer: B) 7
The degree of the polynomial is 7, which is the highest exponent of the polynomial.

درجة كثير الحدود هي 7 ، وهي أعلى أس في كثير الحدود.

3.3. Factoring of polynomials

3.3.1 Tips related to Factoring of polynomials

Factoring Polynomials Factoring polynomials involves expressing a polynomial as a product of simpler polynomials. Key concepts:

1. **Roots**: A root of a polynomial $P(x)$ is a value r where $P(r) = 0$. Each root corresponds to a factor of the form $(x - r)$. This means if r is a root of $P(x)$, then $(x - r)$ is a factor of $P(x)$. For example, if $x = 2$ is a root of $P(x) = x^2 - 4x + 4$, then $P(x) = (x - 2)^2$.

2. **Relationship between Root and Factor**: If r is a root of $P(x)$, then $P(x)$ can be written as $P(x) = (x - r)Q(x)$, where $Q(x)$ is the quotient polynomial obtained when dividing $P(x)$ by $(x - r)$. This relationship is essential for simplifying polynomials and finding additional roots.

3. **Long Division**: Polynomial long division divides one polynomial by another, helping confirm factors when a root is known. For instance, dividing $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ by $(x - 2)$, given $x = 2$ is a root, yields a simpler quotient polynomial.

4. **Factorization**: Factorization rewrites $P(x)$ as a product of factors. For example, $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ has roots $x = 2$ and $x = 3$, so $Q(x) = (x - 2)(x - 3)$. Factorization often takes the form $P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$, where r_i are roots.

5. **Examples:**

(a). $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ (difference of squares)

(b). $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ (difference of cubes)

These methods are crucial for simplifying polynomial expressions and solving polynomial equations.

تحليل كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود هو عملية التعبير عن كثيرة الحدود كمنتج لكثيرات حدود أبسط. المفاهيم الأساسية تشمل:

1 . **الجذور** : جذر كثيرة الحدود $P(x)$ هو قيمة r بحيث $P(r) = 0$. كل جذر يعادل عاملًا من الشكل $(x - r)$. هذا يعني أنه إذا كان r جذرًا لـ $P(x)$ ، فإن $(x - r)$ هو عامل من عوامل $P(x)$. على سبيل المثال، إذا كان $x = 2$ جذرًا لـ $P(x) = x^2 - 4x + 4$ ، فإن $P(x) = (x - 2)^2$.

2 . **العلاقة بين الجذر والعامل** : إذا كان r جذرًا لـ $P(x)$ ، فيمكن كتابة $P(x)$ كـ $P(x) = (x - r)Q(x)$ ، حيث $Q(x)$ هو ناتج القسمة عند قسمة $P(x)$ على $(x - r)$. تعتبر هذه العلاقة أساسية لتبسيط كثيرات الحدود والعثور على جذور إضافية.

3 . **القسمة المطولة** : تُستخدم القسمة المطولة لقسمة كثيرة حدود على أخرى، مما يساعد في تأكيد العوامل عند معرفة جذر معين. على سبيل المثال، قسمة $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ على $(x - 2)$ مع العلم أن $x = 2$ جذر يعطينا كثيرة حدود أبسط.

4 . **التحليل** : يعيد التحليل كتابة $P(x)$ كمنتج لعوامل. لكثيرة حدود مثل $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ ، نجد أن الجذور $x = 2$ و $x = 3$ ، مما يعطي $Q(x) = (x - 2)(x - 3)$. غالبًا ما يستخدم التحليل الشكل $P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ حيث r_i هي الجذور.

5 . **أمثلة** :

(أ). $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ (فرق بين مربعين)

(ب). $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ (فرق بين مكعبين)

تساعد هذه الأساليب في تبسيط تعبيرات كثيرات الحدود وحل معادلاتها بشكل فعال.

3.3.2 Exercises

Question 3.3.153.

Explain the Factor Theorem and how it relates zeros of a polynomial to its factors.
A) It states that if $x = a$ is a zero of a polynomial $P(x)$, then $(x - a)$ is a factor of $P(x)$.
B) It states that the remainder of dividing $P(x)$ by $(x - a)$ is zero if a is a zero of $P(x)$.
C) Both A and B are correct.
D) None of these choices.

Answer: C) Both A and B are correct.
Explanation:
The Factor Theorem states that $(x - a)$ is a factor of a polynomial $P(x)$ if and only if $P(a) = 0$. This means that $x = a$ is a zero (root) of the polynomial, and when we divide $P(x)$ by $(x - a)$, the remainder is zero.

الإجابة: ج) كل من أ و ب صحيح.
تفسير:
تنص نظرية العوامل على أن $(x - a)$ هو عامل للمتعددة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(a) = 0$. هذا يعني أن $x = a$ هو جذر للمتعددة الحدود، وعند قسمة $P(x)$ على $(x - a)$ ، يكون الباقي صفرًا.

Question 3.3.154.

State the Remainder Theorem and describe its significance in polynomial division.
A) The remainder of dividing $P(x)$ by $(x - a)$ is $P(a)$.
B) The remainder of dividing $P(x)$ by $(x - a)$ is zero.
C) The remainder of dividing $P(x)$ by $(x - a)$ is $(x - a)$.
D) None of these choices.

Answer: A) The remainder of dividing $P(x)$ by $(x - a)$ is $P(a)$.
Explanation:
The Remainder Theorem states that when a polynomial $P(x)$ is divided by $(x - a)$, the remainder is equal to $P(a)$. This theorem provides a quick way to find the remainder without performing the actual division.

الإجابة: أ) الباقي من قسمة $P(x)$ على $(x - a)$ هو $P(a)$.
تفسير:
تنص نظرية الباقي على أنه عند قسمة متعددة الحدود $P(x)$ على $(x - a)$ ، فإن الباقي يساوي $P(a)$. توفر هذه النظرية طريقة سريعة لإيجاد الباقي دون إجراء القسمة الفعلية.

Question 3.3.155.

How are the zeros of a polynomial related to its linear factors? A) Each zero corresponds to a linear factor of the form $(x - a)$.
B) Zeros and factors are unrelated concepts.
C) Zeros correspond to the coefficients of the polynomial.
D) None of these choices.

Answer: A) Each zero corresponds to a linear factor of the form $(x-a)$.
Explanation:
For a polynomial equation, each zero $x=a$ indicates that $(x-a)$ is a factor of the polynomial. This means the polynomial can be expressed as a product of its linear factors corresponding to its zeros.

الإجابة: أ) كل جذر يقابله عامل خطي من الشكل $(x-a)$.
تفسير:
بالنسبة لمعادلة متعددة الحدود، كل جذر $x=a$ يشير إلى أن $(x-a)$ هو عامل للمتعددة الحدود. هذا يعني أنه يمكن التعبير عن المتعددة الحدود كحاصل ضرب عواملها الخطية المقابلة لجذورها.

Question 3.3.156.

Explain how synthetic division can be used to find the remainder when dividing a polynomial by $(x-a)$. A) By evaluating $P(a)$ directly.
B) By performing synthetic division, the final value obtained is the remainder, which equals $P(a)$.
C) Synthetic division cannot be used to find remainders.
D) None of these choices.

Answer: B) By performing synthetic division, the final value obtained is the remainder, which equals $P(a)$.
Explanation:
Synthetic division is a shortcut method for dividing a polynomial by a linear factor of the form $(x-a)$. The final value obtained in the synthetic division process is the remainder, which according to the Remainder Theorem, is equal to $P(a)$.

الإجابة: ب) من خلال إجراء القسمة التركيبية، القيمة النهائية هي الباقي، والذي يساوي $P(a)$.
تفسير:
القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة متعددة الحدود على عامل خطي من الشكل $(x-a)$. القيمة النهائية التي تم الحصول عليها في عملية القسمة التركيبية هي الباقي، والذي وفقًا لنظرية الباقي، يساوي $P(a)$.

Question 3.3.157.

State the Division Algorithm for polynomials and explain its components. A) $P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$, where $P(x)$ is the dividend, $D(x)$ is the divisor, $Q(x)$ is the quotient, and $R(x)$ is the remainder.
B) $P(x)=D(x)\cdot R(x)+Q(x)$, where $R(x)$ is the quotient.
C) $P(x)=Q(x)+R(x)$, with no divisor involved.
D) None of these choices.

Answer: A) $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, where $P(x)$ is the dividend, $D(x)$ is the divisor, $Q(x)$ is the quotient, and $R(x)$ is the remainder.
Explanation:
The Division Algorithm states that when a polynomial $P(x)$ is divided by a non-zero polynomial $D(x)$, there exist polynomials $Q(x)$ and $R(x)$ such that $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, where the degree of $R(x)$ is less than the degree of $D(x)$.

الإجابة: أ) $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ، حيث $P(x)$ هو المقسوم، $D(x)$ هو المقسوم عليه، $Q(x)$ هو خارج القسمة، و $R(x)$ هو الباقي.
تفسير:
تنص خوارزمية القسمة على أنه عند قسمة متعددة الحدود $P(x)$ على متعددة حدود غير صفرية $D(x)$ ، فإنه توجد متعددتا حدود $Q(x)$ و $R(x)$ بحيث $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ، حيث درجة $R(x)$ أقل من درجة $D(x)$.

Question 3.3.158.

What is the multiplicity of a zero in a polynomial, and how does it affect the graph of the polynomial? A) The number of times a zero is repeated as a factor; higher multiplicity causes the graph to touch the x-axis but not cross it.
B) The degree of the polynomial; higher degree means higher multiplicity.
C) The coefficient of the zero; affects the steepness of the graph.
D) None of these choices.

Answer: A) The number of times a zero is repeated as a factor; higher multiplicity causes the graph to touch the x-axis but not cross it.
Explanation:
Multiplicity refers to the number of times a particular zero appears as a root of the polynomial. If a zero has even multiplicity, the graph touches the x-axis at that point but does not cross it. If the multiplicity is odd, the graph crosses the x-axis at that zero.

الإجابة: أ) عدد المرات التي يتكرر فيها الجذر كعامل؛ زيادة التعددية تجعل الرسم البياني يلامس محور السينات دون قطعه.
تفسير:
تشير التعددية إلى عدد المرات التي يظهر فيها جذر معين كجذر لمتعددة الحدود. إذا كان للجذر تعددية زوجية، فإن الرسم البياني يلامس محور السينات عند تلك النقطة دون قطعه. إذا كانت التعددية فردية، فإن الرسم البياني يقطع محور السينات عند ذلك الجذر.

Question 3.3.159.

How do the Remainder Theorem and Factor Theorem relate to each other? A) The Factor Theorem is a special case of the Remainder Theorem when the remainder is zero.
B) They are unrelated theorems.
C) The Remainder Theorem is derived from the Factor Theorem.
D) None of these choices.

Answer: A) The Factor Theorem is a special case of the Remainder Theorem when the remainder is zero.
Explanation:
The Remainder Theorem states that the remainder of dividing $P(x)$ by $(x-a)$ is $P(a)$. The Factor Theorem extends this by stating that if $P(a) = 0$, then $(x-a)$ is a factor of $P(x)$. Thus, the Factor Theorem is a special case of the Remainder Theorem.

الإجابة: أ) نظرية العوامل هي حالة خاصة من نظرية الباقي عندما يكون الباقي صفرًا.
تفسير:
تنص نظرية الباقي على أن الباقي من قسمة $P(x)$ على $(x-a)$ هو $P(a)$. تمد نظرية العوامل هذا بالقول إنه إذا كان $P(a) = 0$ ، فإن $(x-a)$ هو عامل لـ $P(x)$. وبالتالي، فإن نظرية العوامل هي حالة خاصة من نظرية الباقي.

Question 3.3.160.

How can the Remainder Theorem be used to evaluate a polynomial at a given point? A) By performing polynomial long division and finding the remainder.
B) By directly substituting the value into the polynomial.
C) Both A and B are valid methods.
D) None of these choices.

Answer: C) Both A and B are valid methods.
Explanation:
The Remainder Theorem states that $P(a)$ is the remainder when $P(x)$ is divided by $(x-a)$. Therefore, evaluating the polynomial at $x = a$ gives the remainder. This can be done by direct substitution or by performing polynomial division.

الإجابة: ج) كل من أ و ب طرق صحيحة.
تفسير:
تنص نظرية الباقي على أن $P(a)$ هو الباقي عند قسمة $P(x)$ على $(x-a)$. لذلك، تقييم المتعددة الحدود عند $x = a$ يعطي الباقي. يمكن القيام بذلك عن طريق التعويض المباشر أو عن طريق إجراء قسمة متعددة الحدود.

Question 3.3.161.

If the remainder of dividing a polynomial $P(x)$ by $(x-a)$ is not zero, what does this imply about $(x-a)$ and $P(x)$? A) $(x-a)$ is not a factor of $P(x)$, and $x = a$ is not a zero of $P(x)$.
B) $(x-a)$ is a factor of $P(x)$, and $x = a$ is a zero of $P(x)$.
C) The remainder has no implications for factors or zeros.
D) None of these choices.

Answer: A) $(x-a)$ is not a factor of $P(x)$, and $x = a$ is not a zero of $P(x)$.
Explanation:
If the remainder is not zero when dividing by $(x-a)$, then $(x-a)$ does not divide evenly into $P(x)$, meaning it is not a factor. Consequently, $x = a$ is not a zero of $P(x)$.

الإجابة: أ) $(x-a)$ ليس عاملًا لـ $P(x)$ ، و $x = a$ ليس جذرًا لـ $P(x)$.
تفسير:
إذا كان الباقي غير صفر عند القسمة على $(x-a)$ ، فهذا يعني أن $(x-a)$ لا يقسم $P(x)$ تمامًا، وبالتالي ليس عاملًا. وبالتالي، $x = a$ ليس جذرًا لـ $P(x)$.

Question 3.3.162.

Describe how polynomial long division is similar to numerical long division and its role in finding the quotient and remainder. A) Both processes involve dividing, multiplying, subtracting, and bringing down terms sequentially.
B) Polynomial long division is entirely different from numerical long division.
C) Polynomial long division does not provide a remainder.
D) None of these choices.

Answer: A) Both processes involve dividing, multiplying, subtracting, and bringing down terms sequentially.
Explanation:
Polynomial long division mirrors numerical long division in its steps: divide the highest-degree term, multiply, subtract, and bring down the next term, repeating until all terms are processed. This method helps find both the quotient and the remainder of the division.

الإجابة: أن كلا العمليتين تتضمنان القسمة والضرب والطرح وإنزال الحدود بالتتابع.
تفسير:
تشبه قسمة متعددة الحدود الطويلة القسمة العددية الطويلة في خطواتها: قسمة الحد ذو الدرجة الأعلى، الضرب، الطرح، وإنزال الحد التالي، وتكرار ذلك حتى تتم معالجة جميع الحدود. تساعد هذه الطريقة في إيجاد كل من خارج القسمة والباقي.

Question 3.3.163.

Factor the polynomial $x^2 - 5x + 6$. A) $(x - 2)(x - 3)$
B) $(x - 1)(x - 6)$
C) $(x + 2)(x - 3)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x - 2)(x - 3)$
Find two numbers that multiply to 6 and add to -5.
These numbers are -2 and -3.
Thus, the factorization is $(x - 2)(x - 3)$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 6 ومجموعهما -5 .
هذان العددان هما -2 و -3 .
لذلك، التحليل هو $(x - 2)(x - 3)$.

Question 3.3.164.

Factor the polynomial $x^2 + 7x + 10$. A) $(x + 5)(x + 2)$
B) $(x - 5)(x + 2)$
C) $(x - 1)(x + 10)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x+5)(x+2)$
Find two numbers that multiply to 10 and add to 7.
These numbers are 5 and 2.
Thus, the factorization is $(x+5)(x+2)$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 10 ومجموعهما 7 .
هذان العددان هما 5 و 2 .
لذلك، التحليل هو $(x+5)(x+2)$.

Question 3.3.165.

Factor the polynomial $x^2-4x-12$. A) $(x-6)(x+2)$
B) $(x-4)(x+3)$
C) $(x+6)(x-2)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x-6)(x+2)$
Find two numbers that multiply to -12 and add to -4. These numbers are -6 and 2.
Thus, the factorization is $(x-6)(x+2)$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما -12 ومجموعهما -4 .
هذان العددان هما -6 و 2 .
لذلك، التحليل هو $(x-6)(x+2)$.

Question 3.3.166.

Factor the polynomial $2x^2+5x+3$. A) $(2x+3)(x+1)$
B) $(x+3)(2x+1)$
C) $(2x-3)(x-1)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(2x+3)(x+1)$
Use trial and error to find factors that multiply to $2x^2+5x+3$:
$(2x+3)(x+1)$ works, since $2x\cdot 1+3\cdot x=5x$.

نستخدم طريقة التجربة والخطأ لإيجاد العوامل التي تحقق $2x^2+5x+3$:
$(2x+3)(x+1)$ هو التحليل الصحيح، لأن $2x\cdot 1+3\cdot x=5x$.

Question 3.3.167.

Factor the polynomial $x^2-10x+25$. A) $(x-5)^2$
B) $(x+5)^2$
C) $(x-5)(x+5)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x-5)^2$
Recognize this as a perfect square trinomial:
$x^2-10x+25=(x-5)^2$.

نلاحظ أن هذه معادلة لمربع كامل:
$x^2-10x+25=(x-5)^2$.

Question 3.3.168.

Factor the polynomial x^2-16. A) $(x-4)(x+4)$
B) $(x-8)(x+2)$
C) $(x+4)^2$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x-4)(x+4)$
This is a difference of squares:
$x^2-16=(x-4)(x+4)$.

هذا هو الفرق بين مربعين:
$x^2-16=(x-4)(x+4)$.

Question 3.3.169.

Factor the polynomial x^3-27. A) $(x-3)(x^2+3x+9)$
B) $(x+3)(x^2-3x+9)$
C) $(x-3)(x+3)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x-3)(x^2+3x+9)$
This is a difference of cubes:
$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$.

هذا هو الفرق بين المكعبين:
$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$.

Question 3.3.170.

Factor the polynomial x^3+8. A) $(x+2)(x^2-2x+4)$
B) $(x-2)(x^2+2x+4)$
C) $(x+2)(x-2)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: A) $(x+2)(x^2-2x+4)$
This is a sum of cubes:
$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$.

هذا هو مجموع المكعبين:
$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$.

Question 3.3.171.

Factor the polynomial $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ by grouping. A) $(x-3)(x+2)(x-1)$
B) $(x-3)(x+3)(x+2)$
C) $(x+3)(x-2)(x-3)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: B) $(x-3)(x+3)(x+2)$
Group the terms:
$(x^3 + 2x^2) - (9x + 18) = x^2(x+2) - 9(x+2)$.
Factor further: $(x+2)(x^2-9) = (x+2)(x-3)(x+3)$.

نقوم بتجميع الحدود:
$(x^3 + 2x^2) - (9x + 18) = x^2(x+2) - 9(x+2)$.
نحلل أكثر: $(x+2)(x^2-9) = (x+2)(x-3)(x+3)$.

Question 3.3.172.

Factor the polynomial $x^3 - 2x^2 - x + 2$ by grouping. A) $(x-2)(x+1)(x+2)$
B) $(x-2)(x+1)^2$
C) $(x-2)(x-1)(x+1)$
D) No factorization
E) None of these choices

Answer: C) $(x-2)(x-1)(x+1)$
Group the terms:
$(x^3 - 2x^2) + (-x + 2) = x^2(x-2) - 1(x-2)$.
Factor further: $(x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

نقوم بتجميع الحدود:
$(x^3 - 2x^2) + (-x + 2) = x^2(x-2) - 1(x-2)$.
نحلل أكثر: $(x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

3.4. Completing the Square

3.4.1 How to use completing square

Completing the Square
Completing the square is a technique to rewrite a quadratic expression in the form $ax^2 + bx + c$ as a perfect square plus a constant. The process is as follows:
1. **Rewrite the Equation**: Start with the quadratic expression, for example, $x^2 + 6x + 5$.
2. **Separate the Constant Term**: Write it as $x^2 + 6x$ and move the constant aside.
3. **Add and Subtract** $\left(\frac{b}{2}\right)^2$: To complete the square, add and subtract $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ inside the expression. Here, $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$.
4. **Rewrite as a Perfect Square**: Rewrite as $(x+3)^2 - 4$.
Thus, $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.
This method is helpful in solving quadratic equations and analyzing parabolas.

إكمال المربع
إكمال المربع هو تقنية لإعادة كتابة تعبير تربيعي من الشكل $ax^2 + bx + c$ كمعادلة تربيعية كاملة زائد ثابت. الخطوات كالتالي:
1 . **إعادة كتابة المعادلة** : نبدأ بالتعبير التربيعي، مثلًا $x^2 + 6x + 5$.
2 . **فصل الحد الثابت** : نكتب $x^2 + 6x$ ونترك الثابت جانبًا.
3 . **إضافة وطرح** $\left(\frac{b}{2}\right)^2$: لإكمال المربع، نضيف ونطرح $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ داخل التعبير. هنا، $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$.
4 . **إعادة كتابة المربع الكامل** : نكتبها بالشكل $(x+3)^2 - 4$.
وبالتالي، $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.
تعتبر هذه الطريقة مفيدة في حل المعادلات التربيعية وتحليل القطوع المكافئة.

3.4.2 Exercises

Question 3.4.173.

Complete the square for the expression $x^2 + 6x + 5$. A) $(x+3)^2 - 4$
B) $(x+2)^2 - 5$
C) $(x+3)^2 - 9$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+3)^2 - 4$
The binomial used is $(x+3)$. Take half of 6, square it to get 9, then add and subtract 9.
Thus, $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

الثنائي المستخدم هو $(x+3)$. نأخذ نصف 6 ، ثم نربعها لنحصل على 9 ، ثم نضيف 9 ونطرح 9 .
لذلك، $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

Question 3.4.174.

Complete the square for the expression $x^2 + 14x + 50$. A) $(x+7)^2 - 1$
B) $(x+7)^2 - 3$

C) $(x+7)^2+1$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: C) $(x+7)^2+1$
The binomial used is $(x+7)$. Take half of 14, square it to get 49, then add and subtract 49.
Thus, $x^2+14x+50 = x^2+14x+49+1 = (x+7)^2+1$.

الثنائي المستخدم هو $(x+7)$. نأخذ نصف 14 ، ثم نربعها لنحصل على 49 ، ثم نضيف 49 ونطرح 49 .
لذلك، $x^2+14x+50 = (x+7)^2+1$.

Question 3.4.175.

Complete the square for the expression $x^2-12x+40$. A) $(x-6)^2+4$
B) $(x-6)^2+1$
C) $(x-6)^2+2$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x-6)^2+4$
The binomial used is $(x-6)$. Take half of -12, square it to get 36, then add and subtract 36.
Thus, $x^2-12x+40 = (x-6)^2+4$.

الثنائي المستخدم هو $(x-6)$. نأخذ نصف -12 ، ثم نربعها لنحصل على 36 ، ثم نضيف 36 ونطرح 36 .
لذلك، $x^2-12x+40 = (x-6)^2+4$.

Question 3.4.176.

Complete the square for the expression $x^2+18x+85$. A) $(x+9)^2+4$
B) $(x+9)^2+1$
C) $(x+9)^2+3$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+9)^2+4$
The binomial used is $(x+9)$. Take half of 18, square it to get 81, then add and subtract 81.
Thus, $x^2+18x+85 = (x+9)^2+4$.

الثنائي المستخدم هو $(x+9)$. نأخذ نصف 18 ، ثم نربعها لنحصل على 81 ، ثم نضيف 81 ونطرح 81 .
لذلك، $x^2+18x+85 = (x+9)^2+4$.

Question 3.4.177.

Complete the square for the expression $x^2 - 20x + 110$. A) $(x-10)^2 + 10$
B) $(x-10)^2 + 5$
C) $(x-10)^2 + 4$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x-10)^2 + 10$
The binomial used is $(x-10)$. Take half of -20, square it to get 100, then add and subtract 100.
Thus, $x^2 - 20x + 110 = (x-10)^2 + 10$.

الثنائي المستخدم هو $(x-10)$. نأخذ نصف -20 ، ثم نربعها لنحصل على 100 ، ثم نضيف 100 ونطرح 100 .
لذلك، $x^2 - 20x + 110 = (x-10)^2 + 10$.

Question 3.4.178.

Complete the square for the expression $x^2 + 6x + 5$. A) $(x+3)^2 - 4$
B) $(x-3)^2 + 4$
C) $(x+2)^2 - 5$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+3)^2 - 4$
First, take half of 6, square it to get 9, then add and subtract 9.
Thus, $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

أولاً، نأخذ نصف 6 ، ثم نربعها لنحصل على 9 ، ثم نضيف 9 ونطرح 9 .
لذلك، $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

Question 3.4.179.

Complete the square for the expression $x^2 + 4x + 1$. A) $(x+2)^2 - 3$
B) $(x+1)^2 - 4$
C) $(x+2)^2 - 1$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+2)^2-3$
Take half of 4, square it to get 4, then add and subtract 4.
Thus, $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$.

نأخذ نصف 4 ، ثم نربعها لنحصل على 4 ، ثم نضيف 4 ونطرح 4 .
لذلك، $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$.

Question 3.4.180.

Complete the square for the expression $x^2+10x+16$. A) $(x+5)^2-9$
B) $(x+5)^2-16$
C) $(x+5)^2-25$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+5)^2-9$
Take half of 10, square it to get 25, then add and subtract 25.
Thus, $x^2+10x+16=(x+5)^2-9$.

نأخذ نصف 10 ، ثم نربعها لنحصل على 25 ، ثم نضيف 25 ونطرح 25 .
لذلك، $x^2+10x+16=(x+5)^2-9$.

Question 3.4.181.

Complete the square for the expression x^2-6x+8. A) $(x-3)^2-1$
B) $(x-3)^2-9$
C) $(x-3)^2-5$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x-3)^2-1$
Take half of -6, square it to get 9, then add and subtract 9.
Thus, $x^2-6x+8=(x-3)^2-1$.

نأخذ نصف -6 ، ثم نربعها لنحصل على 9 ، ثم نضيف 9 ونطرح 9 .
لذلك، $x^2-6x+8=(x-3)^2-1$.

Question 3.4.182.

Complete the square for the expression $x^2+12x+40$. A) $(x+6)^2-4$
B) $(x+6)^2+4$
C) $(x+6)^2-16$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: B) $(x+6)^2+4$
Take half of 12, square it to get 36, then add and subtract 36.
Thus, $x^2+12x+40 = x^2+12x+(36-36)+36+4 = (x+6)^2+4$.

نأخذ نصف 12 ، ثم نربعها لنحصل على 36 ، ثم نضيف 36 ونطرح 36 .
لذلك، $x^2+12x+40 = (x+6)^2+4$.

Question 3.4.183.

Complete the square for the expression $x^2-8x+15$. A) $(x-4)^2-1$
B) $(x-4)^2-9$
C) $(x-4)^2-16$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: B) $(x-4)^2-1$
Take half of -8, square it to get 16, then add and subtract 16.
Thus, $x^2-8x+15 = (x-4)^2-1$.

نأخذ نصف -8 ، ثم نربعها لنحصل على 16 ، ثم نضيف 16 ونطرح 16 .
لذلك، $x^2-8x+15 = (x-4)^2-1$.

Question 3.4.184.

Complete the square for the expression $x^2-14x+49$. A) $(x-7)^2$
B) $(x-7)^2-2$
C) $(x-7)^2-9$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+7)^2$
Take half of 14, square it to get 49. No need to subtract.
Thus, $x^2-14x+49 = (x-7)^2$.

نأخذ نصف 14 ، ثم نربعها لنحصل على 49 . لا حاجة للطرح.
لذلك، $x^2-14x+49 = (x+7)^2$.

Question 3.4.185.

Complete the square for the expression x^2-4x+7. A) $(x-2)^2+3$
B) $(x-2)^2+1$
C) $(x-2)^2+4$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x-2)^2+3$
Take half of -4, square it to get 4, then add and subtract 4.
Thus, $x^2-4x+7=(x-2)^2+3$.

نأخذ نصف -4 ، ثم نربعها لنحصل على 4 ، ثم نضيف 4 ونطرح 4 .
لذلك، $x^2-4x+7=(x-2)^2+3$.

Question 3.4.186.

Complete the square for the expression $x^2+16x+65$. A) $(x+8)^2+1$
B) $(x+8)^2-16$
C) $(x+8)^2-64$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+8)^2+1$
Take half of 16, square it to get 64, then add and subtract 64.
Thus, $x^2+16x+64+1=(x+8)^2+1$.

نأخذ نصف 16 ، ثم نربعها لنحصل على 64 ، ثم نضيف 64 ونطرح 64 .
لذلك، $x^2+16x+64+1=(x+8)^2+1$.

Question 3.4.187.

Complete the square for the expression $x^2-10x+30$. A) $(x-5)^2+5$
B) $(x-5)^2+2$
C) $(x-5)^2+1$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x-5)^2+5$
Take half of -10, square it to get 25, then add and subtract 25.
Thus, $x^2-10x+30=(x-5)^2+5$.

نأخذ نصف -10 ، ثم نربعها لنحصل على 25 ، ثم نضيف 25 ونطرح 25 .
لذلك، $x^2-10x+30=(x-5)^2+5$.

Question 3.4.188.

Complete the square for the expression $x^2+20x+105$. A) $(x+10)^2+5$
B) $(x+10)^2+1$
C) $(x+10)^2+4$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: A) $(x+10)^2+5$
Take half of 20, square it to get 100, then add and subtract 100.
Thus, $x^2+20x+105=(x+10)^2+5$.

نأخذ نصف 20 ، ثم نربعها لنحصل على 100 ، ثم نضيف 100 ونطرح 100 .
لذلك، $x^2+20x+105=(x+10)^2+5$.

3.5. Finding the Equation of the Conic

3.5.1 Equations of Conic Sections

Equations of Conic Sections

1. **Line**: A linear equation is given by

$$y = mx + b,$$

where m is the slope, and b is the y-intercept. A line has a constant slope and no curvature. It divides the plane into two half-planes and extends infinitely in both directions.

2. **Parabola**:

- Opens up or down:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

- Opens side-to-side:

$$x = ay^2 + by + c.$$

- Vertex: The highest or lowest point, depending on the direction it opens.
- Axis of Symmetry: A vertical or horizontal line passing through the vertex.
- Focus and Directrix: Every point on a parabola is equidistant from a fixed point called the focus and a line called the directrix.

معادلات القطوع المخروطية

1 . الخط المستقيم : معادلة الخط المستقيم هي

$$y = mx + b,$$

حيث m هو الميل و b هو تقاطع المحور ي. الخط المستقيم له ميل ثابت ولا يوجد له انحناء. يقسم المستوى إلى نصفين ويمتد إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين.

2 . **القطع المكافئ** : ـ مفتوح للأعلى أو للأسفل:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

ـ مفتوح جانبيًا:

$$x = ay^2 + by + c.$$

الرأس ـ أعلى أو أدنى نقطة، حسب اتجاه الفتحة

ـ محور التماثل: خط عمودي أو أفقي يمر عبر الرأس:

ـ البؤرة والدليل: كل نقطة على القطع المكافئ تبعد عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة وخط يسمى الدليل بمقدار متساوٍ.

3. **Circle**: The standard equation for a circle with center (h, k) and radius r is:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

- Center: The midpoint of all points on the circle.
- Radius: Distance from the center to any point on the circle.
- Symmetry: A circle has infinite lines of symmetry and is symmetric in all directions around the center.

4. **Ellipse**: - Horizontal major axis:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

- Vertical major axis:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

- Major and Minor Axes: The longest and shortest diameters.
- Foci: Two fixed points inside the ellipse; the sum of distances from any point on the ellipse to the foci is constant.
- Symmetry: An ellipse has two axes of symmetry (the major and minor axes).

5. **Hyperbola**: - Opens left-right:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

- Opens up-down:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

- Vertices: The closest points on each branch of the hyperbola.
- Foci: Two fixed points; the absolute difference in distances from any point on the hyperbola to the foci is constant.
- Asymptotes: Two lines that the hyperbola approaches but never touches.

These equations represent the basic forms of conic sections.

3 . الدائرة: المعادلة العامة لدائرة مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

ـ المركز: نقطة منتصف جميع النقاط على الدائرة.
ـ نصف القطر: المسافة من المركز إلى أي نقطة على الدائرة.
ـ التماثل: الدائرة لها عدد لانهائي من محاور التماثل وتكون متماثلة في جميع الاتجاهات حول المركز.

4 . **القطع الناقص (الإهليجي)** : ـ محور رئيسي أفقي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

ـ محور رئيسي عمودي:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

المحور الرئيسي والمحور الثانوي: أطول وأقصر قطرين.
ـ البؤرتان: نقطتان ثابتتان داخل القطع؛ مجموع المسافات من أي نقطة على القطع إلى البؤرتين ثابت.
ـ التماثل: القطع الناقص له محوران للتماثل (المحور الرئيسي والمحور الثانوي).

5 . **القطع الزائد** : ـ مفتوح جانبيًا:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

ـ مفتوح للأعلى أو للأسفل:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

ـ الرؤوس: أقرب نقطتين على كل فرع من القطع.
ـ البؤرتان: نقطتان ثابتتان؛ الفرق المطلق في المسافات من أي نقطة على القطع إلى البؤرتين ثابت.
ـ الخطوط المقاربة: خطان يقترب القطع الزائد منهما دون أن يلامسهما.

تمثل هذه المعادلات الأشكال الأساسية للقطوع المخروطية.

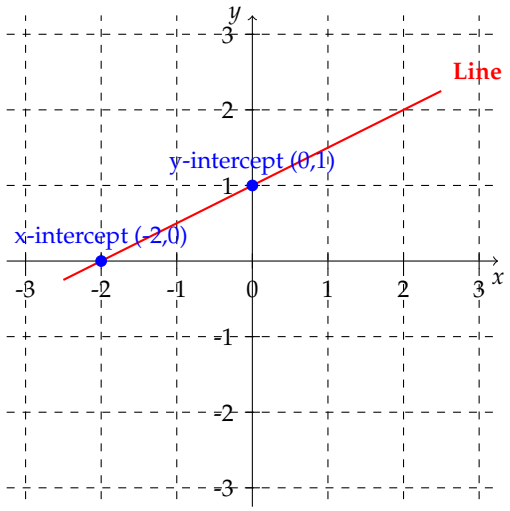


Figure 24. A line with equation $y = \frac{1}{2}x + 1$

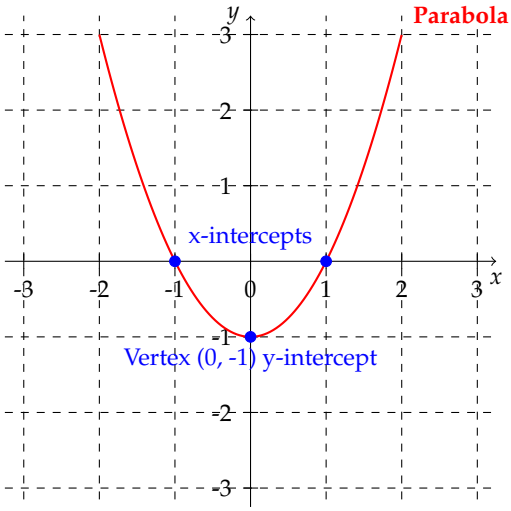


Figure 25. A parabola with equation $y = x^2 - 1$ and vertex at $(0, -1)$

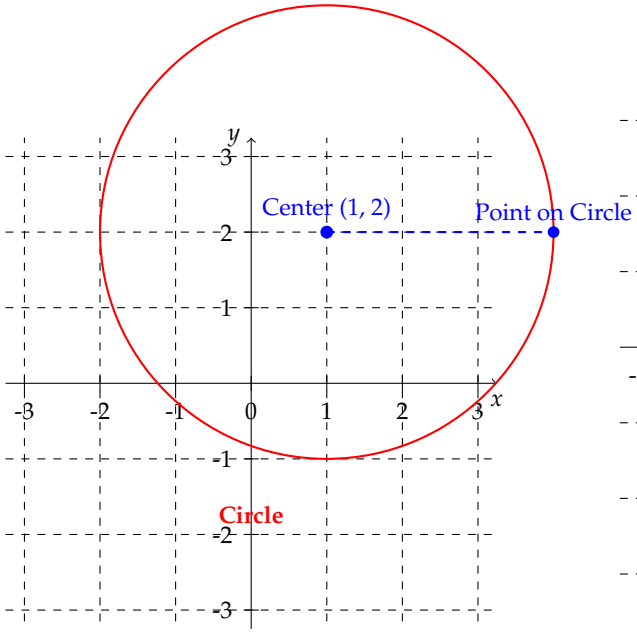


Figure 26. A circle with center at $(1, 2)$, radius 3, and radius line shown. The Cartesian Equation is: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

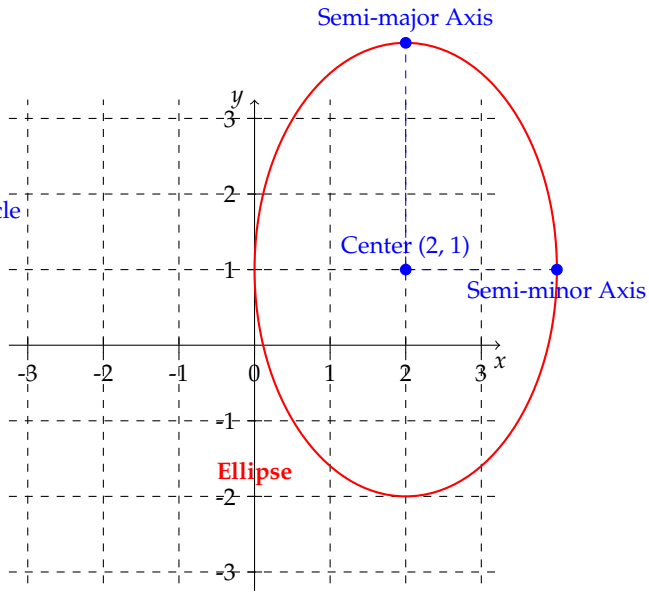


Figure 27. An ellipse with center at $(2, 1)$, semi-minor axis 2 along x, and semi-major axis 3 along y. The Cartesian Equation is: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

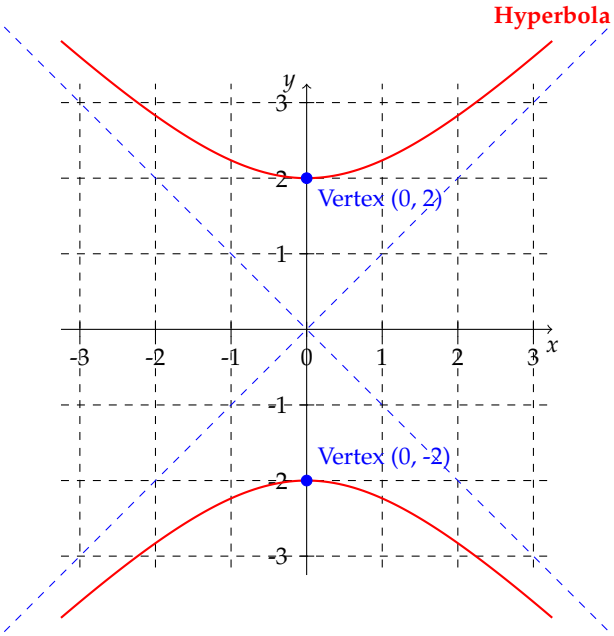


Figure 28. An up-down hyperbola centered at $(0,0)$ with vertices at $(0,2)$ and $(0,-2)$. The Cartesian Equation is: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

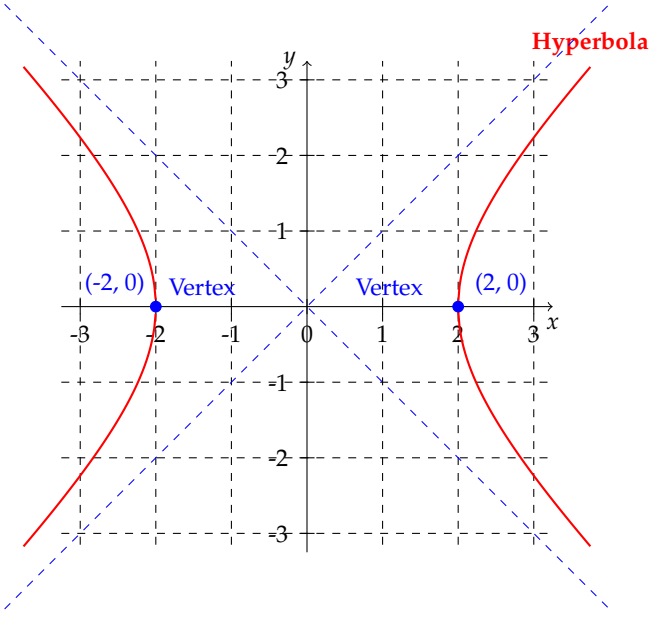


Figure 29. A side-to-side hyperbola centered at $(0,0)$ with vertices at $(2,0)$ and $(-2,0)$. The Cartesian Equation is: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

3.5.2 Exercises

Question 3.5.189.

The following equation $x^2 - 4x + y^2 = 0$ can be rewritten as A) $(x-2)^2 - y^2 = 4$
B) $x^2 + (y-2)^2 = 4$
C) $(x-2)^2 + y^2 = 4$
D) $(x+2)^2 + y^2 = 4$
E) None of these choices

Answer: C) $(x-2)^2 + y^2 = 4$
The binomial used is $(x-2)$. Take half of -4, square it to get 4, then add and subtract 4.
Thus, $x^2 - 4x + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4$.

الثنائي المستخدم هو $(x-2)$. نأخذ نصف -4 ، ثم نربعها لنحصل على 4 ، ثم نضيف 4 ونطرح 4 .
لذلك، $x^2 - 4x + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4$.

Question 3.5.190.

The following equation $x^2 + 8x + y^2 = 0$ can be rewritten as A) $(x+4)^2 - y^2 = 16$
B) $x^2 + (y+4)^2 = 16$
C) $(x+4)^2 + y^2 = 16$

D) $(x-4)^2+y^2=16$
E) None of these choices

Answer: C) $(x+4)^2+y^2=16$
The binomial used is $(x+4)$. Take half of 8, square it to get 16, then add and subtract 16.
Thus, $x^2+8x+y^2=(x+4)^2+y^2-16$.

الثنائي المستخدم هو $(x+4)$. نأخذ نصف 8 ، ثم نربعها لنحصل على 16 ، ثم نضيف 16 ونطرح 16 .
لذلك، $x^2+8x+y^2=(x+4)^2+y^2-16$.

Question 3.5.191.

The following equation $x^2-6x+y^2=0$ can be rewritten as A) $(x-3)^2-y^2=9$
B) $x^2+(y-3)^2=9$
C) $(x-3)^2+y^2=9$
D) $(x+3)^2+y^2=9$
E) None of these choices

Answer: C) $(x-3)^2+y^2=9$
The binomial used is $(x-3)$. Take half of -6, square it to get 9, then add and subtract 9.
Thus, $x^2-6x+y^2=(x-3)^2+y^2-9$.

الثنائي المستخدم هو $(x-3)$. نأخذ نصف -6 ، ثم نربعها لنحصل على 9 ، ثم نضيف 9 ونطرح 9 .
لذلك، $x^2-6x+y^2=(x-3)^2+y^2-9$.

Question 3.5.192.

The following equation $x^2+10x+y^2=0$ can be rewritten as A) $(x+5)^2-y^2=25$
B) $x^2+(y+5)^2=25$
C) $(x+5)^2+y^2=25$
D) $(x-5)^2+y^2=25$
E) None of these choices

Answer: C) $(x+5)^2+y^2=25$
The binomial used is $(x+5)$. Take half of 10, square it to get 25, then add and subtract 25.
Thus, $x^2+10x+y^2=(x+5)^2+y^2-25$.

الثنائي المستخدم هو $(x+5)$. نأخذ نصف 10 ، ثم نربعها لنحصل على 25 ، ثم نضيف 25 ونطرح 25 .
لذلك، $x^2+10x+y^2=(x+5)^2+y^2-25$.

Question 3.5.193.

The following equation $x^2 + 14x + y^2 = 0$ can be rewritten as A) $(x+7)^2 - y^2 = 49$
B) $x^2 + (y+7)^2 = 49$
C) $(x+7)^2 + y^2 = 49$
D) $(x-7)^2 + y^2 = 49$
E) None of these choices

Answer: C) $(x+7)^2 + y^2 = 49$
The binomial used is $(x+7)$. Take half of 14, square it to get 49, then add and subtract 49.
Thus, $x^2 + 14x + y^2 = (x+7)^2 + y^2 - 49$.

الثنائي المستخدم هو $(x+7)$. نأخذ نصف 14 ، ثم نربعها لنحصل على 49 ، ثم نضيف 49 ونطرح 49 .
لذلك، $x^2 + 14x + y^2 = (x+7)^2 + y$

Question 3.5.194.

The following equation $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$ can be rewritten as A) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$
B) $(x+4)^2 - (y-3)^2 = 25$
C) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$
D) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$
E) None of these choices

Answer: D) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$
The binomials used are $(x+4)$ and $(y-3)$. Take half of 8 and -6, square them to get 16 and 9, then add and subtract these values.
Thus, $x^2 + 8x + y^2 - 6y = (x+4)^2 + (y-3)^2 - 25$.

الثنائيان المستخدمان هما $(x+4)$ و $(y-3)$. نأخذ نصف 8 و -6 ، ثم نربعها لنحصل على 16 و 9 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك، $x^2 + 8x + y^2 - 6y = (x+4)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0$
.

Question 3.5.195.

The following equation $x^2 - 10x + y^2 + 4y = 0$ can be rewritten as A) $(x-5)^2 - (y+2)^2 = 29$
B) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 29$
C) $(x+5)^2 - (y-2)^2 = 29$
D) $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 29$
E) None of these choices

Answer: B) $(x-5)^2+(y+2)^2=29$
The binomials used are $(x-5)$ and $(y+2)$. Take half of -10 and 4, square them to get 25 and 4, then add and subtract these values.
Thus, $x^2-10x+y^2+4y=(x-5)^2+(y+2)^2-29$.

الثنائيان المستخدمان هما $(x-5)$ و $(y+2)$. نأخذ نصف -10 و 4 ، ثم نربعها لنحصل على 25 و 4 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك، $x^2-10x+y^2+4y=(x-5)^2+(y+2)^2-29$.

Question 3.5.196.

The following equation $4x^2+16x-9y^2+36y=0$ can be rewritten as A) $(2x+4)^2-(3y-6)^2=36$
B) $(2x-4)^2+(3y+6)^2=36$
C) $(2x+4)^2+(3y-6)^2=36$
D) $(2x-4)^2-(3y+6)^2=36$
E) None of these choices

Answer: A) $(2x+4)^2-(3y-6)^2=36$
The binomials used are $(2x+4)$ and $(3y-6)$. Factor out 4 and -9, take half of 8 and -12, square them to get 16 and 36, then add and subtract these values.
Thus, $4x^2+16x-9y^2+36y=(2x+4)^2-(3y-6)^2-36$.

الثنائيان المستخدمان هما $(2x+4)$ و $(3y-6)$. نقوم بتوزيع 4 و -9 ، نأخذ نصف 8 و -12 ، ثم نربعها لنحصل على 16 و 36 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك،
$4x^2+16x-9y^2+36y=(2x+4)^2-(3y-6)^2-36$.

Question 3.5.197.

The following equation $9x^2+36x+4y^2-16y=0$ can be rewritten as A) $(3x+6)^2+(2y-4)^2=36$
B) $(3x-6)^2-(2y+4)^2=36$
C) $(3x+6)^2-(2y-4)^2=36$
D) $(3x-6)^2+(2y+4)^2=36$
E) None of these choices

Answer: A) $(3x+6)^2+(2y-4)^2=36$
The binomials used are $(3x+6)$ and $(2y-4)$. Factor out 9 and 4, take half of 12 and -8, square them to get 36 and 16, then add and subtract these values.
Thus, $9x^2+36x+4y^2-16y=(3x+6)^2+(2y-4)^2-36$.

الثنائيان المستخدمان هما $(3x+6)$ و $(2y-4)$. نقوم بتوزيع 9 و 4 ، نأخذ نصف 12 و -8 ، ثم نربعها لنحصل على 36 و 16 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك،
$9x^2+36x+4y^2-16y=(3x+6)^2+(2y-4)^2-36$.

Question 3.5.198.

The following equation $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: C) Circle
The binomials used are $(x-3)$ and $(y+4)$. Take half of -6 and 8, square them to get 9 and 16, then add and subtract these values.
Thus, $x^2 + y^2 - 6x + 8y = (x-3)^2 + (y+4)^2 - 25$.
This is a circle centered at $(3,-4)$ with radius 5.

الثنائيان المستخدمان هما $(x-3)$ و $(y+4)$. نأخذ نصف -6 و 8 ، ثم نربعها لنحصل على 9 و 16 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك، $x^2 + y^2 - 6x + 8y = (x-3)^2 + (y+4)^2 - 25$.
وهذا يمثل دائرة مركزها $(3,-4)$ ونصف قطرها 5 .

Question 3.5.199.

The following equation $y^2 + 4y - 8x = 0$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: B) Parabola
The binomial used is $(y+2)$. Take half of 4, square it to get 4, then add and subtract this value.
Thus, $y^2 + 4y - 8x = (y+2)^2 - 8x$. This is a parabola that opens to the right.

الثنائي المستخدم هو $(y+2)$. نأخذ نصف 4 ، ثم نربعها لنحصل على 4 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيمة.
لذلك، $y^2 + 4y - 8x = (y+2)^2 - 8x$. هذا يمثل قطعاً مكافئاً يفتح إلى اليمين.

Question 3.5.200.

The following equation $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: D) Ellipse
The binomials used are $(2x-4)$ and $(y+2)$. Factor out 4 for x, take half of -8 and 4, square them to get 16 and 4, then add and subtract these values.
Thus, $4x^2+y^2-8x+4y=(2x-4)^2+(y+2)^2-16$. This is an ellipse centered at $(2,-2)$.

الثنائيان المستخدمان هما $(2x-4)$ و $(y+2)$. نقوم بتوزيع 4 في x ، نأخذ نصف -8 و 4 ، ثم نربعها لنحصل على 16 و 4 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم .
لذلك، $4x^2+y^2-8x+4y=(2x-4)^2+(y+2)^2-16$.
وهذا يمثل قطعاً ناقصاً مركزه $(2,-2)$.

Question 3.5.201.

The following equation $9x^2-4y^2-18x+16y=0$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: E) Hyperbola
The binomials used are $(3x-3)$ and $(2y+4)$. Factor out 9 for x and -4 for y, take half of -6 and 8, square them to get 9 and 16, then add and subtract these values.
Thus, $9x^2-4y^2-18x+16y=(3x-3)^2-(2y+4)^2-25$. This is a hyperbola centered at $(1,-2)$.

الثنائيان المستخدمان هما $(3x-3)$ و $(2y+4)$. نقوم بتوزيع 9 في x و -4 في y ، نأخذ نصف -6 و 8 ، ثم نربعها لنحصل على 9 و 16 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم .
لذلك،
$9x^2-4y^2-18x+16y=(3x-3)^2-(2y+4)^2-25$.
وهذا يمثل قطعاً زائداً مركزه $(1,-2)$.

Question 3.5.202.

The following equation $x^2+y^2-12x+10y=-25$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: C) Circle
The binomials used are $(x-6)$ and $(y+5)$. Take half of -12 and 10, square them to get 36 and 25, then add and subtract these values.
Thus, $x^2+y^2-12x+10y=(x-6)^2+(y+5)^2-61$, resulting in $(x-6)^2+(y+5)^2=36$. This is a circle centered at $(6,-5)$ with radius 6.

الثنائيان المستخدمان هما $(x-6)$ و $(y+5)$. نأخذ نصف -12 و 10 ، ثم نربعها لنحصل على 36 و 25 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك، $x^2+y^2-12x+10y=(x-6)^2+(y+5)^2-61$.
وهذا يمثل دائرة مركزها $(6,-5)$ ونصف قطرها 6 .

Question 3.5.203.

The following equation $9x^2-4y^2-54x+16y=100$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: E) Hyperbola
The binomials used are $(3x-9)$ and $(2y+4)$. Factor out 9 for x and -4 for y, take half of -18 and 8, square them to get 81 and 16, then add and subtract these values.
Thus, $9x^2-4y^2-54x+16y=(3x-9)^2-(2y+4)^2-100$, resulting in $(3x-9)^2-(2y+4)^2=100$. This is a hyperbola centered at $(3,-2)$.

الثنائيان المستخدمان هما $(3x-9)$ و $(2y+4)$. نقوم بتوزيع 9 في x و -4 في y ، نأخذ نصف -18 و 8 ، ثم نربعها لنحصل على 81 و 16 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك،
$9x^2-4y^2-54x+16y=(3x-9)^2-(2y+4)^2-100$.
وهذا يمثل قطعاً زائداً مركزه $(3,-2)$.

Question 3.5.204.

The following equation $25x^2+16y^2-100x+64y=36$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: D) Ellipse
The binomials used are $(5x-10)$ and $(4y+8)$. Factor out 25 for x and 16 for y, take half of -100 and 64, square them to get 100 and 64, then add and subtract these values.
Thus, $25x^2+16y^2-100x+64y=(5x-10)^2+(4y+8)^2-196$, resulting in $(5x-10)^2+(4y+8)^2=36$. This is an ellipse centered at $(2,-2)$.

الثنائيان المستخدمان هما $(5x-10)$ و $(4y+8)$. نقوم بتوزيع 25 في x و 16 في y ، نأخذ نصف -100 و 64 ، ثم نربعها لنحصل على 100 و 64 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيم.
لذلك،
$25x^2+16y^2-100x+64y=(5x-10)^2+(4y+8)^2-196$
. وهذا يمثل قطعاً ناقصاً مركزه $(2,-2)$.

Question 3.5.205.

The following equation $y^2-10y-8x=24$ represents a A) Line
B) Parabola
C) Circle
D) Ellipse
E) Hyperbola

Answer: B) Parabola
The binomial used is $(y-5)$. Take half of -10, square it to get 25, then add and subtract this value.
Thus, $y^2-10y-8x=(y-5)^2-25-8x$, resulting in $(y-5)^2=8x+49$. This is a parabola that opens to the right.

الثنائي المستخدم هو $(y-5)$. نأخذ نصف -10 ، ثم نربعها لنحصل على 25 ، ثم نضيف ونطرح هذه القيمة.
لذلك، $y^2-10y-8x=(y-5)^2-25-8x$. وهذا يمثل قطعاً مكافئاً يفتح إلى اليمين.

Chapter 4

Equations involving Radical, Logarithms and Exponentials

4.1. Radical Equations

4.1.1 Tips for Radical

Radical Equations

A radical equation is an equation in which the variable appears under a radical, such as a square root or cube root. To solve radical equations, follow these steps:

1. **Isolate the Radical**: Get the radical term alone on one side of the equation if possible.
2. **Eliminate the Radical**: Raise both sides of the equation to the power that matches the index of the radical (e.g., square both sides if it's a square root).
3. **Solve the Resulting Equation**: After removing the radical, solve the remaining polynomial or linear equation.
4. **Check for Extraneous Solutions**: Raising both sides to a power can introduce extraneous solutions. Substitute solutions back into the original equation to verify.

المعادلات الجذرية

المعادلة الجذرية هي معادلة يظهر فيها المتغير تحت جذر، مثل الجذر التربيعي أو الجذر التكعيبي. لحل المعادلات الجذرية، اتبع الخطوات التالية:

1. **عزل الجذر** : اجعل الحد الجذري وحده على أحد جانبي المعادلة إن أمكن.
2. **التخلص من الجذر** : ارفع كلا الجانبين إلى القوة التي تطابق مؤشر الجذر (مثلاً، مربع كلا الجانبين إذا كان جذرًا تربيعيًا).
3. **حل المعادلة الناتجة** : بعد إزالة الجذر، حل المعادلة الخطية أو التربيعية المتبقية.
4. **التحقق من الحلول الزائفة** : رفع كلا الجانبين إلى قوة يمكن أن يؤدي إلى حلول زائفة. قم بإعادة تعويض الحلول في المعادلة الأصلية للتحقق.

Example: Solve $\sqrt{x+5} = x-1$.
- Square both sides: $x+5 = (x-1)^2$.
- Expand and solve: $x+5 = x^2-2x+1$.
- Rearrange: $0 = x^2-3x-4$.
- Solve: $x = 4$ or $x = -1$.
- Check: $x = -1$ is invalid, so the solution is $x = 4$.

Radical equations require careful handling to avoid false solutions.

مثال : حل $\sqrt{x+5} = x-1$.
- مربع كلا الجانبين: $x+5 = (x-1)^2$.
- قم بالتوسيع والحل: $x+5 = x^2-2x+1$.
- إعادة الترتيب: $0 = x^2-3x-4$.
- الحل: $x = 4$ أو $x = -1$.
- التحقق: $x = -1$ حل زائف، إذن الحل هو $x = 4$.

تتطلب المعادلات الجذرية معالجة دقيقة لتجنب الحلول الزائفة.

4.1.2 Exercises

Question 4.1.206.

Solve the equation $\sqrt{2x+1} = 3$. A) $x = 4$
B) $x = 3$
C) $x = 5$
D) $x = 2$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 4$
Square both sides to remove the square root:
$\sqrt{2x+1} = 3$
$\Rightarrow 2x+1 = 9$
Solve for x:
$2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي:
$\sqrt{2x+1} = 3$
$\Rightarrow 2x+1 = 9$
نحل المعادلة للحصول على x :
$2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

Question 4.1.207.

Solve the equation $\sqrt{x+4} = x-2$. A) $x = 6$
B) $x = 2$
C) $x = 5$
D) $x = 8$
E) None of these choices

Answer: C) $x = 5$
Square both sides to remove the square root:
$\sqrt{x+4} = x-2$
$\Rightarrow x+4 = (x-2)^2$
Expanding and simplifying,
$x+4 = x^2-4x+4$
$x^2-5x = 0 \Rightarrow x = 5$ or $x = 0$. We exclude $x = 0$, since it satisfies not the starting equation $\sqrt{0+4} \neq 0-2$. Consequentially, the solution is $x = 5$.

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي:
$\sqrt{x+4} = x-2$
$\Rightarrow x+4 = (x-2)^2$
بتوسيع المعادلة وتبسيطها،
$x+4 = x^2-4x+4$
$x^2-5x = 0 \Rightarrow x = 5$ او $x = 0$. نستبعد $x = 0$ لانه لا يحقق المعادة الاصلية $\sqrt{0+4} \neq 0-2$ وبالتالي الحل هو $x = 5$.

Question 4.1.208.

Solve the equation $\sqrt{2x+2} = 4$. A) $x = 5$
B) $x = 4$
C) $x = 6$
D) $x = 7$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 5$
Square both sides to remove the square root:
$\sqrt{2x+2} = 4$
$\Rightarrow 2x+2 = 16$
Solve for x:
$2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$.

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي:
$\sqrt{2x+2} = 4$
$\Rightarrow 2x+2 = 16$
نحل المعادلة للحصول على x :
$3x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$.

Question 4.1.209.

Solve the equation $\sqrt{x+5} = x-1$. A) $x = 6$
B) $x = 4$
C) $x = 5$
D) $x = 7$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 4$
Square both sides to remove the square root:
$\sqrt{x+5} = x-1$
$\Rightarrow x+5 = (x-1)^2$
Expanding and simplifying:
$x+5 = x^2-2x+1$
Rearrange to find x:
$x^2-3x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
Note: We excluded $x = -1$ because it does not satisfy the original equation after verification.

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي:
$\sqrt{x+5} = x-1$
$\Rightarrow x+5 = (x-1)^2$
بتوسيع وتبسيط المعادلة:
$x+5 = x^2-2x+1$
نعيد ترتيب المعادلة لإيجاد x :
$x^2-3x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
ملاحظة: استبعدنا $x = -1$ لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية بعد التحقق.

Question 4.1.210.

Solve the equation $\sqrt{4-4x} = x-1$. A) $x = -3$
B) $x = 1$
C) $x = 0$
D) $x = 3$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 1$
Square both sides to remove the square root:
$\sqrt{4-4x} = x-1$
$\Rightarrow 4-4x = (x-1)^2$
Expanding and simplifying:
$4-4x = x^2-2x+1$
Rearrange to find x:
$x^2+2x-3 = 0$
Factor:
$(x+3)(x-1) = 0$
This gives $x = -3$ or $x = 1$.
Verify each solution: For $x = -3$, substituting into the original equation does not hold. Thus, $x = -3$ is an extraneous solution. Only $x = 1$ satisfies the original equation.

نربع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي:
$\sqrt{4-4x} = x-1$
$\Rightarrow 4-4x = (x-1)^2$
بتوسيع وتبسيط المعادلة:
$4-4x = x^2-2x+1$
نعيد ترتيب المعادلة لإيجاد x :
$x^2+2x-3 = 0$
نحلل:
$(x+3)(x-1) = 0$
يعطينا هذا $x = -3$ أو $x = 1$.
بعد التحقق من كل حل: $x = -3$ لا يحقق المعادلة الأصلية، وبالتالي هو حل دخيل. الحل الوحيد الذي يحقق المعادلة الأصلية هو $x = 1$.

4.2. Exponential and Logarithmic Equations

4.2.1 Tips for Exponential Equations

- **Rewrite with a Common Base:** If both sides of the equation have bases that can be rewritten as the same base, rewrite them accordingly.

Example: Solve $4^{x+1} = 2^{2x+3}$.

1. Rewrite 4 as 2^2: $(2^2)^{x+1} = 2^{2x+3}$.
2. Simplify the exponents: $2(x+1) = 2x+3$.
3. Set the exponents equal: $2x+2 = 2x+3$, giving $x = 1$.

نعيد كتابة العدد 4 كالتالي 2^2 ثم نبسط الأسس لنجعل الأساسات متساوية و نجد $x = 1$.

- **Set Exponents Equal:** Once you have the same base on both sides, set the exponents equal to each other.

Example: Solve $3^{x+2} = 3^5$.

1. Set $x+2 = 5$, as the bases are the same.
2. Solve for x: $x = 3$.

- **Use Logarithms When Bases Can't Be Equalized:** If it's impossible to rewrite both sides with the same base, take the logarithm of both sides (common or natural log) to bring the exponent down.

Example: Solve $5^x = 15$.

1. Take ln of both sides: $\ln(5^x) = \ln(15)$.
2. Use the power rule: $x\ln(5) = \ln(15)$.
3. Solve for x: $x = \frac{\ln(15)}{\ln(5)}$.

نأخذ اللوغاريتم للطرفين لاستخدام قاعدة الأسس، ثم نقسم لإيجاد قيمة x .

- **Apply Properties of Exponents:** Use key properties such as $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ and $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ to simplify complex exponentials before solving.

Example: Solve $2^{x+1} \cdot 2^{x-2} = 8$.

1. Combine exponents: $2^{(x+1)+(x-2)} = 2^{2x-1} = 2^3$.
2. Set exponents equal: $2x - 1 = 3$.
3. Solve for x: $x = 2$.

4.2.2 Tips for Logarithmic Equations

- **Rewrite in Exponential Form:** If the equation is in logarithmic form, convert it to exponential form to simplify.

Example: Solve $\log_4(x) = 3$.

1. Rewrite in exponential form: $x = 4^3 = 64$.

نعيد كتابة اللوغاريتم في الصورة الأسية، ونحسب قيمة x .

- **Combine Logarithms on One Side:** If the equation has multiple logarithms, use properties of logarithms to combine them.

Example: Solve $\log(x) + \log(x + 3) = 1$.

1. Use $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$: $\log(x(x + 3)) = 1$.
2. Rewrite in exponential form: $x(x + 3) = 10$.
3. Solve the resulting quadratic equation.

- **Use Logarithmic Properties:** Remember properties like:
  - $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
  - $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
  - $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Example: Solve $\log_2(8x) = 4$.

1. Rewrite as $\log_2(8) + \log_2(x) = 4$.
2. Substitute $\log_2(8) = 3$: $3 + \log_2(x) = 4$.
3. Solve for x: $\log_2(x) = 1$, giving $x = 2$.

- **Check for Extraneous Solutions:** Ensure that solutions do not make the argument of the log negative or zero.

Example: Solve $\log(x-2) = 1$.

1. Rewrite in exponential form: $x - 2 = 10$, so $x = 12$.
2. Check that $x - 2 > 0$, confirming $x = 12$ is valid.

- **Apply Inverse Properties:** Use $a^{\log_a(x)} = x$ and $\log_a(a^x) = x$ to isolate the variable when possible.

Example: Solve $10^{\log(x)} = 100$.

1. Simplify using inverse properties: $x = 100$.

4.2.3 General Tips

- **Practice with Different Logarithmic Bases:** Be comfortable switching bases using $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$.

Example: Solve $\log_3(27) = x$.

1. Rewrite with base 10: $x = \frac{\log(27)}{\log(3)} = 3$.

- **Use Approximation When Needed:** Approximate logarithmic or exponential results with a calculator if necessary.

Example: Solve $2^x = 10$.

1. Take log of both sides: $\log(2^x) = \log(10)$.
2. Solve: $x = \frac{\log(10)}{\log(2)} \approx 3.32$.

- **Review Inverse Properties:** Recall $\ln(e^x) = x$ and $e^{\ln(x)} = x$ for positive x.

Example: Solve $e^{2x} = 7$.

1. Take ln of both sides: $2x = \ln(7)$.
2. Solve for x: $x = \frac{\ln(7)}{2}$.

By mastering these tips, properties, and example applications, solving exponential and logarithmic equations becomes easier and

4.2.4 Exercises with solutions

Question 4.2.211.

Solve the equation $3^{2x+1} = 27$. A) $x = 1$
B) $x = 2$
C) $x = 0$
D) $x = -1$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 1$
Rewrite 27 as 3^3:
$3^{2x+1} = 3^3$
Since the bases are equal, set the exponents equal:
$2x + 1 = 3$
$2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

نعيد كتابة العدد 27 كالتالي 3^3 :
$3^{2x+1} = 3^3$
بما أن الأساسات متساوية، نجعل الأسس متساوية:
$2x + 1 = 3$
$2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Question 4.2.212.

Solve the equation $5^{x-1} = \frac{1}{25}$. A) $x = 2$
B) $x = -1$
C) $x = 0$
D) $x = -2$
E) None of these choices

Answer: D) $x = -2$
Rewrite $\frac{1}{25}$ as 5^{-2}:
$5^{x-1} = 5^{-2}$
Set the exponents equal:
$x - 1 = -2$
$x = -1$.

نعيد كتابة $\frac{1}{25}$ كالتالي 5^{-2} :
$5^{x-1} = 5^{-2}$
نجعل الأسس متساوية:
$x - 1 = -2$
$x = -1$.

Question 4.2.213.

Solve the logarithmic equation $\log_3(x+1) = 2$. A) $x = 8$
B) $x = 7$
C) $x = 6$
D) $x = 9$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 7$
Rewrite the equation in exponential form:
$x + 1 = 3^2$
$x + 1 = 9$
$x = 8$.

نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي:
$x + 1 = 3^2$
$x + 1 = 9$
$x = 8$.

Question 4.2.214.

Solve the equation $\ln(x-2) = 1$. A) $x = e + 2$
B) $x = 2e$
C) $x = e - 2$
D) $x = 2 - e$
E) None of these choices

Answer: A) $x = e + 2$
Rewrite in exponential form:
$x - 2 = e^1$
$x - 2 = e$
$x = e + 2$.

نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي:
$x - 2 = e^1$
$x - 2 = e$
$x = e + 2$.

Question 4.2.215.

Solve the equation $2^{3x} = 16$. A) $x = 1$
B) $x = \frac{4}{3}$
C) $x = 2$
D) $x = \frac{3}{4}$
E) None of these choices

Answer: B) $x = \frac{4}{3}$
Rewrite 16 as 2^4:
$2^{3x} = 2^4$
Set the exponents equal:
$3x = 4$
$x = \frac{4}{3}$.

نعيد كتابة 16 كالتالي 2^4 :
$2^{3x} = 2^4$
نجعل الأسس متساوية:
$3x = 4$
$x = \frac{4}{3}$.

Question 4.2.216.

Solve the equation $4^{x+1} = 2^{2x+3}$. A) $x = -1$
B) $x = 2$
C) $x = 3$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 1$
Rewrite 4^{x+1} as $(2^2)^{x+1} = 2^{2(x+1)}$:
$2^{2(x+1)} = 2^{2x+3}$
Since the bases are equal, set the exponents equal:
$2(x + 1) = 2x + 3$
$2x + 2 = 2x + 3$, which simplifies to $x = 1$.

نعيد كتابة 4^{x+1} كالتالي $(2^2)^{x+1} = 2^{2(x+1)}$:
$2^{2(x+1)} = 2^{2x+3}$
بما أن الأساسات متساوية، نجعل الأسس متساوية:
$2(x + 1) = 2x + 3$
$2x + 2 = 2x + 3$ ، وبالتبسيط نجد $x = 1$.

Question 4.2.217.

Solve the equation $\log_5(x^2 - 1) = 2$. A) $x = 3$
B) $x = 4$
C) $x = \pm 4$
D) $x = 2$
E) None of these choices

Answer: C) $x = \pm 4$
Rewrite in exponential form:
$x^2 - 1 = 5^2$
$x^2 - 1 = 25$
$x^2 = 26$
$x = \pm 4$.

نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي:
$x^2 - 1 = 5^2$
$x^2 - 1 = 25$
$x^2 = 26$
$x = \pm 4$.

Question 4.2.218.

Solve the equation $e^{2x} = e^{x+3}$. A) $x = 3$
B) $x = 2$
C) $x = 1$
D) $x = -3$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 3$
Since the bases are the same, set the exponents equal:
$2x = x + 3$
$x = 3$.

بما أن الأساسات متساوية، نجعل الأسس متساوية:
$2x = x + 3$
$x = 3$.

Question 4.2.219.

Solve the equation $2^{x+2} = 8 \cdot 2^x$. A) $x = 4$
B) $x = 2$
C) $x = 1$
D) $x = -1$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 2$
Rewrite 8 as 2^3:
$2^{x+2} = 2^3 \cdot 2^x$
Combine exponents on the right:
$2^{x+2} = 2^{x+3}$
Since the bases are equal, set the exponents equal:
$x + 2 = x + 3$
$x = 2$.

نعيد كتابة 8 كالتالي 2^3 :
$2^{x+2} = 2^3 \cdot 2^x$
نقوم بدمج الأسس على الجانب الأيمن:
$2^{x+2} = 2^{x+3}$
بما أن الأساسات متساوية، نجعل الأسس متساوية:
$x + 2 = x + 3$
$x = 2$.

Question 4.2.220.

Solve the equation $\log_2(4x - 5) = 3$. A) $x = 6$
B) $x = 7$
C) $x = 8$
D) $x = 9$
E) None of these choices

Answer: C) $x = 8$
Rewrite in exponential form:
$4x - 5 = 2^3$
$4x - 5 = 8$
$4x = 13$
$x = 8$.

نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي:
$4x - 5 = 2^3$
$4x - 5 = 8$
$4x = 13$
$x = 8$.

Question 4.2.221.

Solve the equation $3^{2x} = 9 \cdot 3^{x-1}$. A) $x = 2$
B) $x = 0$
C) $x = -1$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: D) $x = 1$
Rewrite 9 as 3^2:
$3^{2x} = 3^2 \cdot 3^{x-1}$
Combine exponents on the right: $3^{2x} = 3^{x+1}$.
Since the bases are the same, set the exponents equal:
$2x = x + 1$, so $x = 1$.

نعيد كتابة العدد 9 كالتالي 3^2 ، ثم نجعل الأسس متساوية و نجد $x = 1$.

Question 4.2.222.

Solve the logarithmic equation $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$. A) $x = 3$
B) $x = 4$
C) $x = 2$
D) $x = 5$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 3$
Combine logs using $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$:
$\log_5((x+1)(x-1)) = 1$
Rewrite in exponential form: $(x+1)(x-1) = 5^1$
$x^2 - 1 = 5$, so $x^2 = 6$.
Solve for x: $x = 3$.

نقوم بدمج اللوغاريتمات، ثم نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي، و نجد أن $x = 3$.

Question 4.2.223.

Solve the equation $2^{x+2} = 8^{x-1}$. A) $x = 3$
B) $x = 4$
C) $x = -2$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) $x = -2$
Rewrite 8 as 2^3:
$2^{x+2} = (2^3)^{x-1}$
Simplify the exponents: $2^{x+2} = 2^{3x-3}$.
Since the bases are the same, set the exponents equal:
$x + 2 = 3x - 3$, giving $x = -2$.

نعيد كتابة العدد 8 كالتالي 2^3 ، ثم نبسط الأسس و نجعلها متساوية لإيجاد $x = -2$.

Question 4.2.224.

Solve the equation $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln(2)$. A) $x = 3$
B) $x = 4$
C) $x = 2$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: C) $x = 2$
Combine logs using $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$:
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(2)$
Rewrite in exponential form: $\frac{x+1}{x-1} = 2$.
Cross multiply: $x + 1 = 2(x - 1)$, giving $x = 2$.

نقوم بدمج اللوغاريتمات، ثم نعيد كتابة المعادلة بالشكل الكسري، وأخيرًا نجد أن $x = 2$.

Question 4.2.225.

Solve the equation $10^{2x} = 1000 \cdot 10^{x}$. A) $x = 2$
B) $x = 3$
C) $x = 0$
D) $x = -1$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 3$
Rewrite 1000 as 10^3:
$10^{2x} = 10^3 \cdot 10^{x}$
Combine exponents on the right: $10^{2x} = 10^{x+3}$.
Set the exponents equal: $2x = x + 3$, giving $x = 3$.

نعيد كتابة العدد 1000 كالتالي 10^3 ، ثم نجعل الأسس متساوية لنحصل على $x = 3$.

Question 4.2.226.

Solve the equation $2^{x+1} = -16$. A) $x = 4$
B) $x = -4$
C) No solution
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) No solution
Since the range of an exponential function is always positive, 2^{x+1} can never be negative.
Therefore, there is no solution to this equation.

بما أن مجال الدالة الأسية دائمًا موجب، فإن 2^{x+1} لا يمكن أن يكون سالبًا.
لذلك، لا يوجد حل لهذه المعادلة.

Question 4.2.227.

Solve the equation $\log_3(x + 2) = \log_3(-x)$. A) $x = 2$
B) $x = -2$
C) $x = 0$
D) No solution
E) None of these choices

Answer: D) No solution
Since $\log_3(x+2)$ and $\log_3(-x)$ require that $x+2>0$ and $-x>0$, both conditions cannot be true simultaneously.
Thus, there is no solution to the equation.

بما أن $\log_3(x+2)$ و $\log_3(-x)$ يتطلبان أن يكون $x+2>0$ و $-x>0$ ، فإن الشرطين لا يمكن أن يكونا صحيحين في نفس الوقت.
لذلك، لا يوجد حل لهذه المعادلة.

Question 4.2.228.

Solve the equation $\ln(x^2)=\ln(0)$. A) $x=0$
B) $x=1$
C) No solution
D) All real numbers
E) None of these choices

Answer: C) No solution
Since $\ln(0)$ is undefined, there is no x that can satisfy the equation.
Therefore, the equation has no solution.

بما أن $\ln(0)$ غير معرف، فلا يوجد قيمة لـ x يمكنها تحقيق المعادلة.
لذلك، لا يوجد حل لهذه المعادلة.

Question 4.2.229.

Solve the equation $e^{2x}=e^{2x}$. A) $x=0$
B) All real numbers
C) No solution
D) $x=2$
E) None of these choices

Answer: B) All real numbers
Since both sides of the equation are identical, $e^{2x}=e^{2x}$ holds for any value of x.
Thus, the solution is all real numbers.

بما أن طرفي المعادلة متطابقان، فإن $e^{2x}=e^{2x}$ تتحقق لأي قيمة لـ x .
لذلك، الحل هو جميع الأعداد الحقيقية.

Question 4.2.230.

Solve the equation $\log_{10}(x)=\log_{10}(x^2)$. A) $x=1$
B) $x=0$
C) $x=10$
D) $x=\pm 1$
E) None of these choices

Answer: D) $x = \pm 1$
Rewrite as $x = x^2$.
Rearrange to $x^2 - x = 0$, then factor: $x(x-1) = 0$.
So $x = 0$ or $x = 1$, but $x = 0$ is invalid in $\log_{10}(x)$.
Thus, the solution is $x = \pm 1$.

نعيد كتابة المعادلة كالتالي $x = x^2$ ، ونبسط إلى $x(x-1) = 0$.
يكون $x = 0$ أو $x = 1$ ، ولكن $x = 0$ غير صالح في $\log_{10}(x)$.
لذلك، الحل هو $x = \pm 1$.

Question 4.2.231.

Solve the equation $4^{x+2} = 8^{x-1}$. A) $x = 4$
B) $x = 5$
C) $x = -2$
D) $x = 1$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 4$
Rewrite 4 as 2^2 and 8 as 2^3:
$(2^2)^{x+2} = (2^3)^{x-1}$
$2^{2(x+2)} = 2^{3(x-1)}$
Set the exponents equal:
$2(x+2) = 3(x-1)$
$2x + 4 = 3x - 3$
$x = 4$.

نعيد كتابة العدد 4 كالتالي 2^2 ، و 8 كالتالي 2^3 ، ثم نجعل الأسس متساوية ونجد $x = 4$.

Question 4.2.232.

Solve the equation $3^{x+1} + 3^x = 36$. A) $x = 2$
B) $x = 3$
C) $x = -1$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 2$
Rewrite 3^{x+1} as $3 \cdot 3^x$:
$3 \cdot 3^x + 3^x = 36$
Factor out 3^x:
$3^x(3+1) = 36$
$3^x \cdot 4 = 36$
$3^x = 9$, so $x = 2$.

نعيد كتابة 3^{x+1} كالتالي $3 \cdot 3^x$ ، ثم نختصر ونجد $x = 2$.

Question 4.2.233.

Solve the equation $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$. A) $x = 4$
B) $x = 5$
C) $x = 6$

D) $x = 2$
E) None of these choices

Answer: A) $x = 4$
Combine logs: $\log_2((x+1)(x-1)) = 3$
Rewrite in exponential form: $(x+1)(x-1) = 2^3$
$x^2 - 1 = 8$, so $x^2 = 9$.
Solve for x: $x = 4$.

نقوم بدمج اللوغاريتمات، ثم نعيد كتابة المعادلة بالشكل الأسي ونجد أن $x = 4$.

Question 4.2.234.

Solve the equation $5^{2x} = 125 \cdot 5^x$. A) $x = 3$
B) $x = 2$
C) $x = 1$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: B) $x = 2$
Rewrite 125 as 5^3:
$5^{2x} = 5^3 \cdot 5^x$
Combine exponents on the right: $5^{2x} = 5^{x+3}$
Set the exponents equal: $2x = x + 3$, so $x = 2$.

نعيد كتابة العدد 125 كالتالي 5^3 ، ثم نجعل الأسس متساوية لنجد أن $x = 2$.

Question 4.2.235.

Solve the equation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1)$. A) $x = 2$
B) $x = -1$
C) $x = 1$
D) $x = 0$
E) None of these choices

Answer: C) $x = 1$
Rewrite as $x^2 - 1 = x + 1$:
$x^2 - x - 2 = 0$
Factor: $(x-2)(x+1) = 0$
So $x = 2$ or $x = -1$.
However, $\ln(x+1)$ requires $x + 1 > 0$, so $x = 1$.

نعيد كتابة المعادلة كالتالي $x^2 - 1 = x + 1$ ، ونحللها ونجد أن الحل الصالح هو $x = 1$.

Chapter 5

Linear Systems of Equations and Inequalities

5.1. Linear Systems of Equations in two variables

5.1.1 Review Tips for Solving Linear Systems of Equations

1. Solving an Equation in the Form $Ax + By = C$
For an equation in this form: $Ax + By = C$ isolate y by moving Ax to the other side, then divide by B: $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$
2. Solving a Two-Variable System of Linear Equations
To solve a system like:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

use substitution or elimination to find x and y.
3 Solving Vertical and Horizontal Lines
For horizontal lines of the form $y = c$, y is constant. For vertical lines $x = d$, x is constant.
Remark on Non-Standard Forms. Sometimes equations appear in non-standard forms, like $y = \frac{a}{bx+c}$ or other rearranged formats. To solve, first simplify the equation by clearing fractions or distributing terms until it resembles a more standard form.

1 . **حل معادلة من الشكل** $Ax + By = C$
في معادلة مثل: $Ax + By = C$ قم بعزل y بنقل Ax للطرف الآخر، ثم قسمة على B : $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$
2 . **حل نظام معادلتين خطيتين بمجهولين**
لحل نظام مثل:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

استخدم التعويض أو الحذف لإيجاد x و y .
3 . **حل الخطوط الأفقية والرأسية**
في الخطوط الأفقية من الشكل $y = c$ يكون y ثابتاً. أما في الخطوط الرأسية $x = d$ ، يكون x ثابتاً.
ملاحظة حول المعادلات غير القياسية
في بعض الأحيان تظهر المعادلات بأشكال غير قياسية، مثل $y = \frac{a}{bx+c}$ أو أشكال أخرى معاد ترتيبها. لحلها، قم أولاً بتبسيط المعادلة عن طريق إزالة الكسور أو توزيع الحدود إلى أن تصبح بشكل قياسي.

1. **Solve for one variable first**: Choose the simpler equation and solve for one variable in terms of the other.

Example:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

Solve for x in the first equation: $x = 5 - y$.

نبدأ بحل x من المعادلة الأولى: $x = 5 - y$

2. **Substitute carefully**: Substitute the expression from Step 1 into the other equation, ensuring you replace every instance of the chosen variable.

Example: Substitute $x = 5 - y$ into the second equation:

$$2(5 - y) - 3y = 4$$

نعوض $x = 5 - y$ في المعادلة الثانية.

3. **Solve the resulting equation**: After substitution, you'll get an equation with one variable. Solve it as you normally would.

Example: Continuing from above:

$$10 - 2y - 3y = 4 \Rightarrow -5y = -6 \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

نحل المعادلة الناتجة لإيجاد y .

4. **Back-substitute to find the other variable**: Substitute your solution back into the equation you used in Step 1 to find the remaining variable.

Example: Substitute $y = \frac{6}{5}$ back into $x = 5 - y$:

$$x = 5 - \frac{6}{5} = \frac{25 - 6}{5} = \frac{19}{5}$$

نقوم بالتعويض العكسي لإيجاد قيمة x .

5. **Double-check the solution**: Substitute both values into the original equations to ensure they satisfy both equations.

نتحقق من الحل عن طريق التعويض في المعادلتين الأصليتين.

Tips for the Elimination Method.

1. **Align coefficients carefully**: If necessary, multiply one or both equations to align the coefficients of one variable for elimination.

   Example:

   $$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - y = 8 \end{cases}$$

   Multiply the second equation by 2 to align the y coefficients:

   $$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 8x - 2y = 16 \end{cases}$$

   نقوم بضرب المعادلة الثانية في 2 لتوحيد معاملات y .

2. **Add or subtract to eliminate a variable**: Add or subtract the aligned equations to eliminate one of the variables.

   Example: Add the two equations above:

   $$(3x + 2y) + (8x - 2y) = 12 + 16 \Rightarrow 11x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{11}$$

   نجمع المعادلتين لإلغاء y ونحل لإيجاد x .

3. **Solve for the remaining variable**: Substitute the value from Step 2 into either original equation to solve for the remaining variable.

   Example: Substitute $x = \frac{28}{11}$ back into the first equation:

   $$3\left(\frac{28}{11}\right) + 2y = 12 \Rightarrow y = \text{solve for } y$$

   نعوض قيمة x في المعادلة الأولى لإيجاد y .

4. **Check your solution**: Substitute both values back into the original equations to confirm they satisfy both.

   نتحقق من الحل عن طريق التعويض في المعادلتين الأصليتين.

5. **Look for special cases**: If you end up with a statement like $0 = 0$, the system has infinitely many solutions. If you get a contradiction like $0 = 5$, the system has no solution.

   نبحث عن الحالات الخاصة: إذا حصلنا على تناقض مثل $0 = 5$ ، فالنظام ليس له حل.

Choosing the Right Method. المناسبة

- **Use Substitution** when one equation is easily solvable for one of the variables (e.g., $x = y + 3$).

استخدم طريقة التعويض عندما تكون إحدى المعادلات قابلة للحل بسهولة لأحد المتغيرات.

- **Use Elimination** when aligning coefficients of one variable is straightforward, or when both equations are already in standard form and aligning coefficients is easy.

استخدم طريقة الحذف عندما يكون من السهل توحيد معاملات أحد المتغيرات.

5.1.2 Exercises for Substitution Method

Question 5.1.236.

Solve the system of equations by the **Substitution Method**:

$2x - 3y = 7$

$x + y = 4$ A) $(x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)$

B) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{11}{5}\right)$

C) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$

D) $(x, y) = \left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)$

E) None of these choices

Answer: C) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$

1. Solve for x in the second equation: $x = 4 - y$.
2. Substitute $x = 4 - y$ into the first equation: $2(4 - y) - 3y = 7$
3. Simplify and solve for y: $8 - 2y - 3y = 7$ $-5y = -1$, so $y = \frac{1}{5}$.
4. Substitute $y = \frac{1}{5}$ back into $x = 4 - y$ to get: $x = 4 - \frac{1}{5} = \frac{20}{5} - \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$.

So, $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

نقوم بحل x من المعادلة الثانية كالتالي: $x = 4 - y$.

ثم نعوض $x = 4 - y$ في المعادلة الأولى ونبسط:

$2(4 - y) - 3y = 7$

وبالتبسيط، نجد $-5y = -1$ أي $y = \frac{1}{5}$.

نعوض $y = \frac{1}{5}$ في $x = 4 - y$ لنحصل على $x = \frac{19}{5}$.

إذًا، $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Question 5.1.237.

Solve the system of equations by the **Substitution Method**:

$3x - 2y = 14$

$x - y = 10$ A) $(x, y) = (-6, -16)$

B) $(x, y) = (5, -4)$

C) $(x, y) = (2, -1)$

D) $(x, y) = (4, 0)$

E) None of these choices

Answer: A) $(x, y) = (-6, -16)$
1. Solve for x in the second equation: $x = y + 10$.
2. Substitute $x = y + 10$ into the first equation:
$3(y + 10) - 2y = 14$
3. Simplify and solve for y:
$3y + 30 - 2y = 14$
$y + 30 = 14$
$y = -16$.
4. Substitute $y = -16$ back into $x = y + 10$ to get:
$x = -16 + 10 = -6$.
So, $(x, y) = (-6, -16)$.

نبدأ بحل x من المعادلة الثانية كالتالي: $x = y + 10$.
ثم نعوض $x = y + 10$ في المعادلة الأولى ونبسط:
$3(y + 10) - 2y = 14$
وبالتبسيط، نجد $y = -16$.
نعوض $y = -16$ في $x = y + 10$ لنحصل على $x = -6$.
إذًا، $(x, y) = (-6, -16)$.

Question 5.1.238.

Solve the system of equations by the **Substitution Method**:
$2x + 3y = 12$
$x - y = 2$ A) $(x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{28}{5}\right)$
B) $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{18}{5}\right)$
C) $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$
D) $(x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$
E) None of these choices

Answer: C) $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$
1. Solve for x in the second equation: $x = y + 2$.
2. Substitute $x = y + 2$ into the first equation:
$2(y + 2) + 3y = 12$
3. Simplify and solve for y:
$2y + 4 + 3y = 12$
$5y = 8$, so $y = \frac{8}{5}$.
4. Substitute $y = \frac{8}{5}$ back into $x = y + 2$:
$x = \frac{8}{5} + 2 = \frac{8}{5} + \frac{10}{5} = \frac{18}{5}$.
So, $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

نبدأ بحل x من المعادلة الثانية كالتالي: $x = y + 2$.
ثم نعوض $x = y + 2$ في المعادلة الأولى ونبسط:
$2(y + 2) + 3y = 12$
وبالتبسيط، نجد $y = \frac{8}{5}$.
نعوض $y = \frac{8}{5}$ في $x = y + 2$ لنحصل على $x = \frac{18}{5}$.
إذًا، $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Question 5.1.239.

Solve the system of equations by the **Substitution Method**:
$4x - y = 7$
$x + 2y = 11$ A) $(x, y) = \left(\frac{5}{9}, \frac{37}{9}\right)$
B) $(x, y) = \left(\frac{25}{9}, \frac{37}{9}\right)$
C) $(x, y) = \left(\frac{25}{9}, \frac{7}{9}\right)$
D) $(x, y) = \left(\frac{15}{9}, \frac{17}{9}\right)$
E) None of these choices

Answer: B) $(x, y) = \left(\frac{25}{9}, \frac{37}{9}\right)$
1. Solve for x in the first equation: $x = \frac{7+y}{4}$.
2. Substitute $x = \frac{7+y}{4}$ into the second equation:
$\frac{7+y}{4} + 2y = 11$
3. Multiply through by 4 to clear the fraction:
$7 + y + 8y = 44$
$9y = 37$, so $y = \frac{37}{9}$.
4. Substitute $y = \frac{37}{9}$ back into $x = \frac{7+y}{4}$:
$x = \frac{7+\frac{37}{9}}{4} = \frac{\frac{63+37}{9}}{4} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$.
So, $(x, y) = \left(\frac{25}{9}, \frac{37}{9}\right)$.

نبدأ بحل x من المعادلة الأولى كالتالي: $x = \frac{7+y}{4}$.
ثم نعوض $x = \frac{7+y}{4}$ في المعادلة الثانية ونبسط:
$\frac{7+y}{4} + 2y = 11$
ثم نضرب في ٤ للتخلص من الكسر، ونجد $y = \frac{37}{9}$.
نعوض $y = \frac{37}{9}$ في $x = \frac{7+y}{4}$ لنحصل على $x = \frac{25}{9}$.
إذًا، $(x, y) = \left(\frac{25}{9}, \frac{37}{9}\right)$.

Question 5.1.240.
Solve the system of equations by the **Substitution Method**:
$3x + 4y = 10$
$x - 2y = -2$ A) $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$
B)$(x, y) = \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$
C) $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{18}{5}\right)$
D) $(x, y) = -\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$
E) None of these choices

Answer: A) $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$
1. Solve for x in the second equation: $x = 2y - 2$.
2. Substitute $x = 2y - 2$ into the first equation:
$3(2y - 2) + 4y = 10$
3. Simplify and solve for y:
$6y - 6 + 4y = 10$
$10y = 16$, so $y = \frac{8}{5}$.
4. Substitute $y = \frac{8}{5}$ back into $x = 2y - 2$:
$x = 2\left(\frac{8}{5}\right) - 2 = \frac{16}{5} - \frac{10}{5} = \frac{6}{5}$.
So, $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

نبدأ بحل x من المعادلة الثانية كالتالي: $x = 2y - 2$.
ثم نعوض $x = 2y - 2$ في المعادلة الأولى ونبسط:
$3(2y - 2) + 4y = 10$
وبالتبسيط، نجد $y = \frac{8}{5}$.
نعوض $y = \frac{8}{5}$ في $x = 2y - 2$ لنحصل على $x = \frac{6}{5}$.
إذًا، $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

5.1.3 Exercises for Elimination Method

Question 5.1.241.
Solve the system of equations by the **Elimination Method**:
$2x - 3y = 7$
$x + y = 4$ A) $(x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right)$
B) $(x, y) = \left(-\frac{19}{5}, -\frac{1}{5}\right)$
C) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$
D) $(x, y) = \left(\frac{29}{5}, \frac{11}{5}\right)$
E) None of these choices

Answer: C) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$
1. Multiply the second equation by 2 to align the x terms:
$2(x + y) = 2 \cdot 4$
$2x + 2y = 8$
2. Subtract the new equation from the first equation to eliminate x:
$(2x - 3y) - (2x + 2y) = 7 - 8$
$-5y = -1$, so $y = \frac{1}{5}$.
3. Substitute $y = \frac{1}{5}$ back into the second original equation to find x:
$x + \frac{1}{5} = 4$
$x = 4 - \frac{1}{5} = \frac{20}{5} - \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$.
So, $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

نبدأ بضرب المعادلة الثانية في 2 لتوحيد معاملات x :
$2(x + y) = 2 \cdot 4$
$2x + 2y = 8$
ثم نطرح المعادلة الجديدة من المعادلة الأولى لإلغاء x :
$(2x - 3y) - (2x + 2y) = 7 - 8$
$-5y = -1$ ، إذًا $y = \frac{1}{5}$.
نعوض $y = \frac{1}{5}$ في المعادلة الثانية الأصلية لإيجاد x :
$x + \frac{1}{5} = 4$
$x = 4 - \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$.
إذًا، $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Question 5.1.242.

Solve the system of equations by the **Elimination Method**:
$4x - 5y = 9$
$3x + 2y = -4$ A) $(x, y) = \left(-\frac{32}{23}, -\frac{43}{23}\right)$
B) $(x, y) = \left(-\frac{2}{23}, -\frac{43}{23}\right)$
C) $(x, y) = \left(-\frac{12}{23}, -\frac{33}{23}\right)$
D) $(x, y) = \left(\frac{2}{23}, \frac{43}{23}\right)$
E) None of these choices

Answer: B) $(x, y) = \left(-\frac{2}{23}, -\frac{43}{23}\right)$
1. Multiply the first equation by 3 and the second equation by 4 to align the x terms:
$3(4x - 5y) = 3 \cdot 9$
$4(3x + 2y) = 4 \cdot -4$
$12x - 15y = 27$
$12x + 8y = -16$
2. Subtract the second equation from the first to eliminate x:
$(12x - 15y) - (12x + 8y) = 27 - (-16)$
$-23y = 43$, so $y = -\frac{43}{23}$.
3. Substitute $y = -\frac{43}{23}$ back into the first equation:
$4x - 5\left(-\frac{43}{23}\right) = 9$
$4x + \frac{215}{23} = 9$
$4x = 9 - \frac{215}{23} = -\frac{8}{23}$
$x = -\frac{2}{23}$.
So, $(x, y) = \left(-\frac{2}{23}, -\frac{43}{23}\right)$.

نبدأ بضرب المعادلة الأولى في 3 والثانية في 4 لتوحيد معاملات x :
$3(4x - 5y) = 3 \cdot 9$ و $4(3x + 2y) = 4 \cdot -4$
ثم نطرح المعادلتين لإلغاء x ونحل لنحصل على $y = -\frac{43}{23}$.
نعوض $y = -\frac{43}{23}$ في المعادلة الأولى لإيجاد $x = -\frac{2}{23}$.
إذًا، $(x, y) = \left(-\frac{2}{23}, -\frac{43}{23}\right)$.

Question 5.1.243.

Solve the system of equations by the **Elimination Method**:
$5x + 3y = 1$

$2x - y = -3$ A) $(x, y) = \left(\frac{8}{11}, \frac{17}{11}\right)$
B) $(x, y) = \left(\frac{8}{11}, -\frac{7}{11}\right)$
C) $(x, y) = \left(-\frac{18}{11}, \frac{17}{11}\right)$
D) $(x, y) = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{17}{11}\right)$
E) None of these choices

Answer: D) $(x, y) = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{17}{11}\right)$
1. Multiply the second equation by 3 to align the y terms:
$3(2x - y) = 3 \cdot -3$
$6x - 3y = -9$
2. Add the equations to eliminate y:
$(5x + 3y) + (6x - 3y) = 1 - 9$
$11x = -8$, so $x = -\frac{8}{11}$.
3. Substitute $x = -\frac{8}{11}$ back into the second equation:
$2\left(-\frac{8}{11}\right) - y = -3$
$-\frac{16}{11} - y = -3$
$y = -3 + \frac{16}{11} = -\frac{33}{11} + \frac{16}{11} = -\frac{17}{11}$.
So, $(x, y) = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{17}{11}\right)$.

نبدأ بضرب المعادلة الثانية في 3 لتوحيد معاملات y :
$3(2x - y) = 3 \cdot -3$ و $6x - 3y = -9$
ثم نجمع المعادلتين لإلغاء y ونحل لنحصل على $x = -\frac{8}{11}$.
نعوض $x = -\frac{8}{11}$ في المعادلة الثانية لإيجاد $y = -\frac{17}{11}$.
إذًا، $(x, y) = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{17}{11}\right)$.

Question 5.1.244.

Solve the system of equations by the **Elimination Method**:
$3x - 4y = 5$
$5x + 2y = 7$ A) $(x, y) = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}\right)$
B) $(x, y) = \left(\frac{29}{13}, -\frac{12}{13}\right)$
C) $(x, y) = \left(\frac{19}{13}, -\frac{32}{13}\right)$
D)$(x, y) = \left(\frac{9}{13}, -\frac{2}{13}\right)$
E) None of these choices

Answer: A) $(x, y) = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}\right)$
1. Multiply the first equation by 5 and the second by 3 to align the x terms:
$5(3x - 4y) = 5 \cdot 5$
$3(5x + 2y) = 3 \cdot 7$
$15x - 20y = 25$
$15x + 6y = 21$
2. Subtract the second equation from the first to eliminate x:
$(15x - 20y) - (15x + 6y) = 25 - 21$
$-26y = 4$, so $y = -\frac{2}{13}$.
3. Substitute $y = -\frac{2}{13}$ back into the first equation:
$3x - 4\left(-\frac{2}{13}\right) = 5$
$3x + \frac{8}{13} = 5$
$3x = 5 - \frac{8}{13} = \frac{65-8}{13} = \frac{57}{13}$
$x = \frac{19}{13}$.
So, $(x, y) = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}\right)$.

نبدأ بضرب المعادلة الأولى في 5 والثانية في 3 لتوحيد معاملات x :
$5(3x - 4y) = 5 \cdot 5$ و $3(5x + 2y) = 3 \cdot 7$
ثم نطرح المعادلتين لإلغاء x ونحل لنحصل على $y = -\frac{2}{13}$.
نعوض $y = -\frac{2}{13}$ في المعادلة الأولى لإيجاد $x = \frac{19}{13}$.
إذًا، $(x, y) = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}\right)$.

Question 5.1.245.

Solve the system of equations by the **Elimination Method**:
$3x + 4y = 18$
$2x - 3y = -5$ A) $(x, y) = (2, 3)$
B) $(x, y) = (1, 4)$
C) $(x, y) = (-2, 3)$
D) $(x, y) = (3, -2)$
E) None of these choices

Answer: A) $(x, y) = (2, 3)$
1. Multiply the first equation by 2 and the second equation by 3 to align the x terms:
$2(3x + 4y) = 2 \cdot 18$
$3(2x - 3y) = 3 \cdot -5$
$6x + 8y = 36$
$6x - 9y = -15$
2. Subtract the second equation from the first to eliminate x:
$(6x + 8y) - (6x - 9y) = 36 - (-15)$
$17y = 51$, so $y = 3$.
3. Substitute $y = 3$ back into the first original equation to find x:
$3x + 4(3) = 18$
$3x + 12 = 18$
$3x = 6$, so $x = 2$.
Therefore, the solution is $(x, y) = (2, 3)$.

نبدأ بضرب المعادلة الأولى في 2 والثانية في 3 لتوحيد معاملات x :
$2(3x + 4y) = 2 \cdot 18$ و $3(2x - 3y) = 3 \cdot -5$
ثم نطرح المعادلتين لإلغاء x ونحل لنحصل على $y = 3$.
نعوض $y = 3$ في المعادلة الأولى الأصلية لإيجاد $x = 2$.
إذًا، الحل هو $(x, y) = (2, 3)$.

5.1.4 Special cases of linear systems

Question 5.1.246.

Solve the system of equations and determine the number of solutions:

$2x + 4y = 8$

$x + 2y = 4$ A) A unique solution

B) Infinitely many solutions

C) No solution

D) $(x, y) = (0, 4)$

Answer: B) Infinitely many solutions

1. Multiply the second equation by 2 to align the x terms:

$2(x + 2y) = 2 \cdot 4$

$2x + 4y = 8$

2. Since both equations are now the same, they represent the same line.

Therefore, there are infinitely many solutions for every point on the line $2x + 4y = 8$.

بضرب المعادلة الثانية في 2 لتوحيد معاملات x :

$2(x + 2y) = 2 \cdot 4$ ، تصبح المعادلة $2x + 4y = 8$.

بما أن المعادلتين متطابقتان، فإنهما تمثلان نفس الخط المستقيم ،

وبالتالي هناك عدد لا نهائي من الحلول لكل نقطة على الخط $2x + 4y = 8$.

Question 5.1.247.

Solve the system of equations and determine the number of solutions:

$3x - 6y = 12$

$x - 2y = 5$ A) A unique solution

B) Infinitely many solutions

C) No solution

D) $(x, y) = (2, -1)$

Answer: C) No solution

1. Multiply the second equation by 3 to align the x terms:

$3(x - 2y) = 3 \cdot 5$

$3x - 6y = 15$

2. Compare the two equations:

$3x - 6y = 12$

$3x - 6y = 15$

The left sides are identical, but the right sides are different, indicating that the lines are parallel and do not intersect.

Therefore, there is no solution.

نبدأ بضرب المعادلة الثانية في 3 لتوحيد معاملات x :

$3(x - 2y) = 3 \cdot 5$ ، تصبح المعادلة $3x - 6y = 15$.

عند مقارنة المعادلتين نجد أن الطرف الأيسر متطابق، بينما الطرف الأيمن مختلف،

مما يشير إلى أن الخطين متوازيين ولا يتقاطعان، وبالتالي لا يوجد حل.

Question 5.1.248.

Solve the system of equations and determine the number of solutions:

$6x + 9y = 18$

$2x + 3y = 6$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, 1)$

Answer: B) Infinitely many solutions
1. Multiply the second equation by 3 to align the x terms:
$3(2x + 3y) = 3 \cdot 6$
$6x + 9y = 18$
2. Both equations are now identical, representing the same line.
Thus, there are infinitely many solutions along the line $6x + 9y = 18$.

بضرب المعادلة الثانية في 3 لتوحيد معاملات x :
$3(2x + 3y) = 3 \cdot 6$ ، تصبح المعادلة $6x + 9y = 18$.
بما أن المعادلتين متطابقتان، فهما تمثلان نفس الخط المستقيم ، وبالتالي هناك عدد لا نهائي من الحلول على الخط $6x + 9y = 18$.

Question 5.1.249.

Solve the system of equations and determine the number of solutions:
$4x - 6y = 12$
$2x - 3y = 7$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (2, 1)$

Answer: C) No solution
1. Multiply the second equation by 2 to align the x terms:
$2(2x - 3y) = 2 \cdot 7$
$4x - 6y = 14$
2. Compare the two equations:
$4x - 6y = 12$
$4x - 6y = 14$
The left sides are identical, but the right sides are different, indicating that the lines are parallel and do not intersect.
Therefore, there is no solution.

نبدأ بضرب المعادلة الثانية في 2 لتوحيد معاملات x :
$2(2x - 3y) = 2 \cdot 7$ ، تصبح المعادلة $4x - 6y = 14$.
عند مقارنة المعادلتين نجد أن الطرف الأيسر متطابق، بينما الطرف الأيمن مختلف،
مما يشير إلى أن الخطين متوازيين ولا يتقاطعان، وبالتالي لا يوجد حل.

5.1.5 Choosing the appropriate Method

Question 5.1.250.

Choose thee Right Method and solve the system
اختر الطريقة الأنسب للحل. ثم حل النظمة التالية من المعادلات

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Solution Since solving for one variable in either equation is straightforward, the **Substitution Method** is a good choice.

1. **Solve for x in the first equation:**

$$x = 7 - 3y$$

2. **Substitute $x = 7 - 3y$ into the second equation:**

$$2(7 - 3y) - y = -1$$

$$14 - 6y - y = -1$$

$$-7y = -15$$

$$y = \frac{15}{7}$$

3. **Substitute $y = \frac{15}{7}$ back into $x = 7 - 3y$:**

$$x = 7 - 3\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{49 - 45}{7} = \frac{4}{7}$$

Solution: $(x, y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}\right)$

Question 5.1.251.

Choose thee Right Method and solve the system

اختر الطريقة الأنسب للحل. ثم حل النظمة التالية من المعادلات

$$\begin{cases} 4x - 5y = 10 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Solution Here, the **Elimination Method** is a good choice because the coefficients of y can be aligned for easy elimination.

1. **Multiply the second equation by 5 to align the y-terms:**

$$5(2x + y) = 5 \cdot -3$$

$$10x + 5y = -15$$

2. **Add the equations to eliminate y:**

$$(4x - 5y) + (10x + 5y) = 10 + (-15)$$

$$14x = -5$$

$$x = -\frac{5}{14}$$

3. **Substitute $x = -\frac{5}{14}$ back into the second equation:**

$$2\left(-\frac{5}{14}\right) + y = -3$$

$$-\frac{10}{14} + y = -3$$

$$y = -3 + \frac{5}{7} = -\frac{16}{7}$$

Solution: $(x, y) = \left(-\frac{5}{14}, -\frac{16}{7}\right)$

Question 5.1.252.

Choose thee Right Method and solve the system

اختر الطريقة الأنسب للحل. ثم حل النظمة التالية من المعادلات

$$\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases}$$

Solution The **Elimination Method** is suitable here as well, particularly because aligning the x-terms can quickly lead to simplification.

1. **Multiply the first equation by 2 to align the x-terms:**

$$2(3x + 4y) = 2 \cdot 15$$

$$6x + 8y = 30$$

2. **Subtract the second equation from the modified first equation:**

$$(6x + 8y) - (6x - 2y) = 30 - 18$$

$$10y = 12$$

$$y = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

3. **Substitute $y = \frac{6}{5}$ back into the first equation:**

$$3x + 4\left(\frac{6}{5}\right) = 15$$

$$3x + \frac{24}{5} = 15$$

$$3x = 15 - \frac{24}{5} = \frac{75 - 24}{5} = \frac{51}{5}$$

$$x = \frac{51}{15} = \frac{17}{5}$$

Solution: $(x, y) = \left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right)$

5.2. Inequalities in xy-plane

5.2.1 General tips for finding the Intersection of Two Linear Inequalities

To find the intersection of two linear inequalities of the form

$$a_1x + b_1y_1 \leq, \geq, >, < c_1 \quad \text{and} \quad a_2x + b_2y_2 \leq, \geq, >, < c_2$$

- **Graph each inequality**: Rewrite each inequality in **slope-intercept form**, $y_1 = m_1x + d_1$ and $y_2 = m_2x + d_2$.
- **Draw the boundary line**: Use a **solid line** for $\leq$ or $\geq$ and a **dashed line** for $<$ or $>$.
- **Shade the solution region**: For each inequality, determine which side of the boundary line to shade by testing a point (commonly $(0, 0)$ if it is not on the line):
  - For $y_1 \leq m_1x + d_1$: Substitute $(0, 0)$ into the inequality. If $(0, 0)$ satisfies the inequality, **shade the region** that includes $(0, 0)$; otherwise, shade the opposite side.
  - For $y_2 \geq m_2x + d_2$: Similarly, substitute $(0, 0)$. If $(0, 0)$ satisfies the inequality, **shade the region containing** $(0, 0)$; if not, **shade the other side**.

  The area where the two shaded regions overlap is the solution to the system of inequalities, as it satisfies both conditions.
- **Identify the intersection**: The overlapping shaded region is the solution set of the system.

5.2.2 Relevant Cases of Systems of Inequalities in the Plane

Example 5.2.27. *We solve the system of inequalities:* $x \leq 2$.

Solution

1. **Graph the Inequality:** For $x \leq 2$: Draw the line $x = 2$ (vertical, solid).
2. **Identify the Solution Region:** Check if the shaded region contains the point $(0, 0)$ Answer YES. So this side is the solution.

1. **رسم المتباينة :** لـ $x \leq 2$: ارسم الخط $x = 2$ (عمودي، صلب)، وظلل إلى اليسار.
2. **تحديد منطقة الحل:** تحقق مما إذا كانت المنطقة المظللة تحتوي على النقطة $(0, 0)$ الجواب: نعم. إذن، هذا الجانب هو الحل.

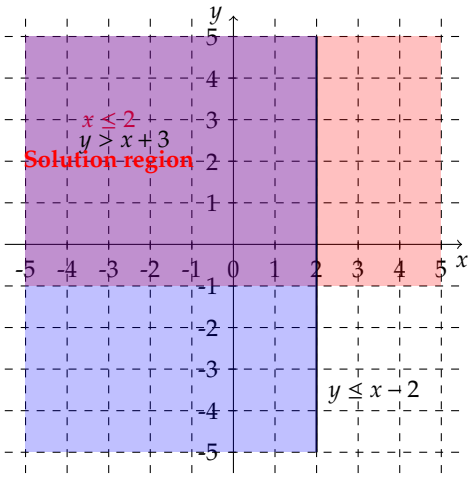


Figure 30. Solution region is the shaded region.

Example 5.2.28. *We solve the system of inequalities:* $y > 1$.

Solution

1. **Graph the Inequality:** For $y > -1$: Draw the line $y = -1$ (horizontal, dashed because of strict inequality).
2. **Identify the Solution Region:**
Check if the shaded region contains the point $(0, 0)$ Answer No. So the other side is the solution region.

1. **رسم المتباينة :** لـ $y > 1$: ارسم الخط $y = 1$ (أفقي، مقطع بسبب اكبر قطعا)، وظلل إلى اليسار.
2. **تحديد منطقة الحل:** تحقق مما إذا كانت المنطقة المظللة تحتوي على النقطة $(0, 0)$ الجواب: لا. إذن، هذا الجانب الاخرهو الحل.

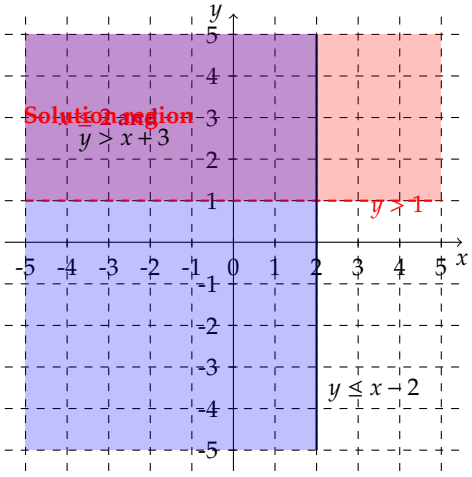


Figure 31. Solution region is the shaded region.

Example 5.2.29. *Determine graphically the region* (x, y) *such that* $2x + 3y \geq 6$.

Solution

To solve the inequality $2x + 3y \geq 6$ graphically, follow these steps:

- **Draw the Line:**
  Plot the points $(3, 0)$ and $(0, 2)$, and draw a solid line through them (solid because $\geq$ includes the boundary).
- **Determine the Region:** Choose a test point, like $(0, 0)$, and substitute into $2x + 3y \geq 6$: See that $2(0) + 3(0) = 0 \geq 6$. is not satisfied. Since $(0, 0)$ does not satisfies the inequality, shade the region that not include $(0, 0)$.

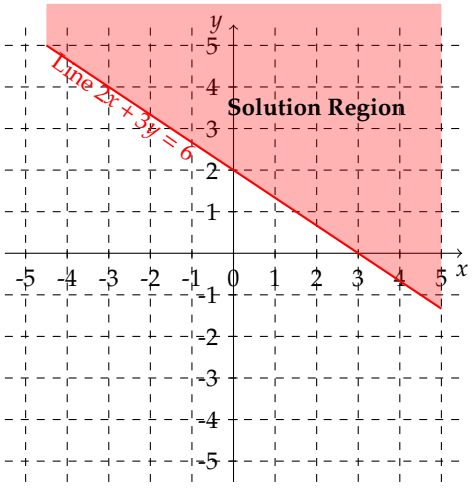


Figure 32. One region as solution: Solution of the inequality $2x + 3y \geq 6$.

Example 5.2.30. *Determine graphically the region* (x, y) *such that* $2x + 3y \leq 6$.

Solution

To solve the inequality $2x + 3y \leq 6$ graphically, follow these steps:

- **Draw the Line:**
  Plot the points $(3, 0)$ and $(0, 2)$, and draw a solid line through them (solid because $\leq$ includes the boundary).
- **Determine the Region:** Choose a test point, like $(0, 0)$, and substitute into $2x + 3y \leq 6$: See that $2(0) + 3(0) = 0 \leq 6$. is satisfied. Since $(0, 0)$ satisfies the inequality, shade the region that include $(0, 0)$.

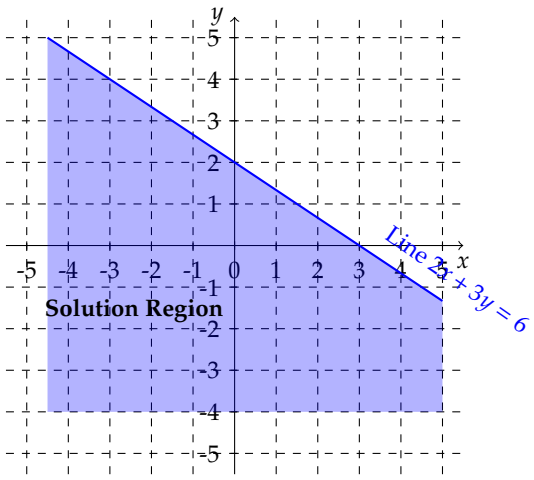


Figure 33. Solution of the inequality $2x + 3y \leq 6$.

Question 5.2.253.

Determine graphically the region (x, y) such that $2x + 3y \geq 6$ and $y \geq 0$.

Example 5.2.31. *We solve the system of inequalities:* $y > -1$ *and* $x \leq 2$.

Solution

1. **Graph the Inequalities Individually:**
• For $y > -1$: Draw the line $y = -1$ (horizontal, dashed), shade above it.
• For $x \leq 2$: Draw the line $x = 2$ (vertical, solid), shade to the left.
2. **Identify the Solution Region:**
• The solution is the overlapping region above $y = -1$ and to the left of $x = 2$.
3. **Characteristics of the Solution:**
• The solution region is unbounded, extending infinitely. It includes points like $(0,0)$, $(1,0)$, and any point with $x \leq 2$ and $y > -1$.
4. **Visualization Summary:**
• **Boundary Lines:**
$y = -1$ (dashed) and $x = 2$ (solid).
• **Shaded Region:**
Above $y = -1$ and left of $x = 2$.

1. **رسم المتباينات بشكل فردي:**
• لـ $y > -1$: ارسم الخط $y = -1$ (أفقي، متقطع)، وظلل فوقه.
• لـ $x \leq 2$: ارسم الخط $x = 2$ (عمودي، صلب)، وظلل إلى اليسار.
2. **تحديد منطقة الحل:**
• منطقة الحل هي المنطقة المتداخلة فوق $y = -1$ وإلى يسار $x = 2$.
3. **خصائص الحل:**
• منطقة الحل غير محدودة، وتمتد إلى ما لا نهاية. تشمل نقاطاً مثل $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، وأي نقطة حيث $x \leq 2$ و $y > -1$.
4. **ملخص التمثيل البياني:**
• **الخطوط الحدودية:** $y = -1$ (متقطع) و $x = 2$ (صلب).
• **المنطقة المظللة: فوق** $y = -1$ وإلى يسار $x = 2$.

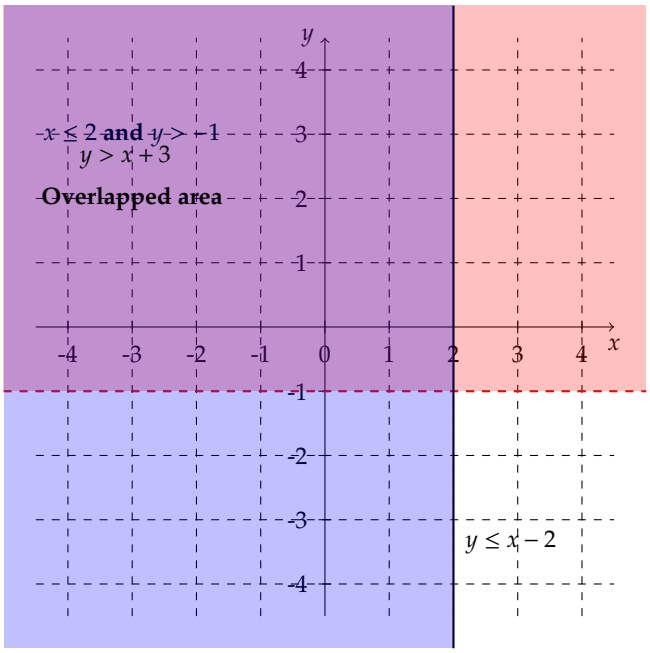


Figure 34. Solution as overlapped area.

Example 5.2.32. *We solve the system of inequalities:* $y > x + 3$ *and* $y \leq x - 2$.

Solution

1. **Graph the Inequalities Individually:**
• For $y > x + 3$: Draw the line $y = -1$ (oblique, dashed), shade above-left it.
• For $y \leq x - 2$: Draw the line $y = x - 2$ (oblique, solid), shade to the down-right.
2. **Identify the Solution Region:**
• There is no overlapping region. Thus, there is no solution.

الخطين $y = x + 3$ و $y = x - 2$ متوازيين ولا يتقاطعان. المناطق التي يعرفانها لا تتداخل، لذلك لا يوجد حل.

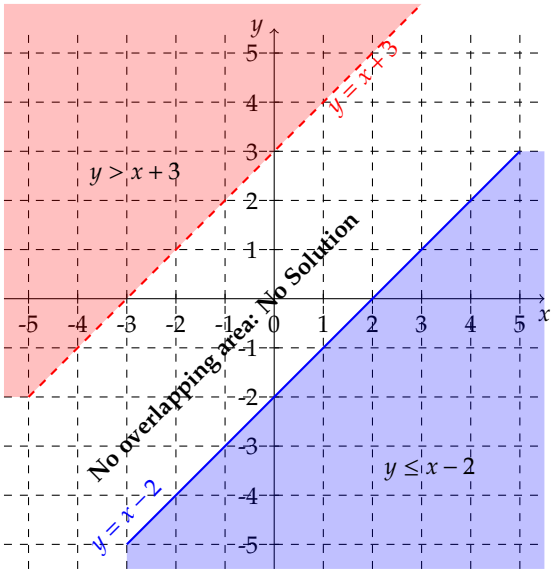


Figure 35. No overlapped area: No Solution.

Example 5.2.33. *We solve the system of inequalities:* $y \geq -x + 1$ *and* $y \leq 2x + 3$.

Solution After drawing the lines $y = -x + 1$ and $y = 2x + 3$, we select a test point, such as $(0, 0)$, to determine which side of each line satisfies the inequalities. This point lies within the overlapping shaded region, confirming that it is part of the solution set. Since the inequalities are non-strict, the solution to this system is a closed, possibly unbounded region where the shaded areas overlap, including the boundary lines. Any point within this overlapping region, or on the boundaries, satisfies both inequalities and is therefore a solution.

بعد رسم الخطين $y = -x + 1$ و $y = 2x + 3$ ، نختار نقطة اختبار، مثل $(0, 0)$ ، لتحديد أي جانب من كل خط يحقق المتباينات. تقع هذه النقطة ضمن منطقة التظليل المتداخلة، مما يؤكد أنها جزء من مجموعة الحل. ونظرًا لأن المتباينات غير صارمة، فإن الحل لهذا النظام هو منطقة مغلقة، وربما غير محدودة، حيث تتداخل المناطق المظللة، بما في ذلك خطوط الحدود. أي نقطة داخل هذه المنطقة المتداخلة، أو على الحدود، تحقق كلا المتباينتين وبالتالي هي حل للنظام.

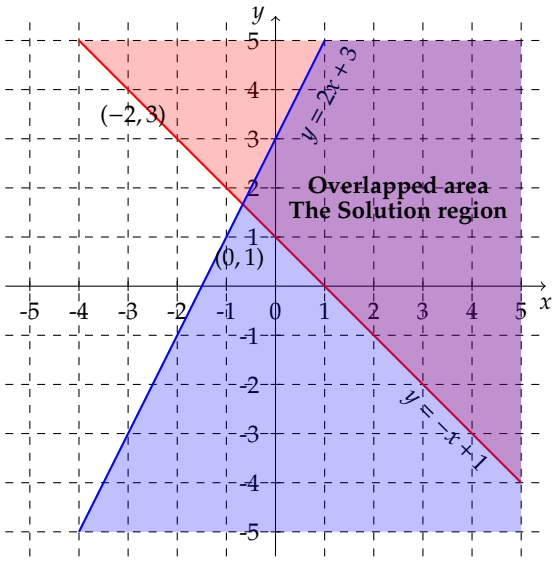


Figure 36. Bounded Region (closed sides)

Example 5.2.34. *We solve the system of inequalities:* $y > x - 1$ *and* $y < -\frac{1}{2}x + 2$.

Solution After drawing the lines $y = x - 1$ and $y = -\frac{1}{2}x + 2$, we select a test point, such as $(0, 0)$, to determine which side of each line satisfies the inequalities. This point lies within the overlapping shaded region, which confirms it is part of the solution set. Since the inequalities are strict, the solution to this system is an open, unbounded region between the two lines where the shaded areas overlap. Any point within this overlapping region satisfies both inequalities and is thus a solution.

بعد رسم الخطين $y = x - 1$ و $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ، نختار نقطة اختبار، مثل $(0, 0)$ ، لتحديد أي جانب من كل خط يحقق المتباينات. تقع هذه النقطة ضمن منطقة التظليل المتداخلة، مما يؤكد أنها جزء من مجموعة الحل. ونظرًا لأن المتباينات صارمة، فإن الحل لهذا النظام هو منطقة مفتوحة وغير محدودة بين الخطين حيث تتداخل المناطق المظللة. أي نقطة داخل هذه المنطقة المتداخلة تحقق كلا المتباينتين وبالتالي هي حل للنظام. .

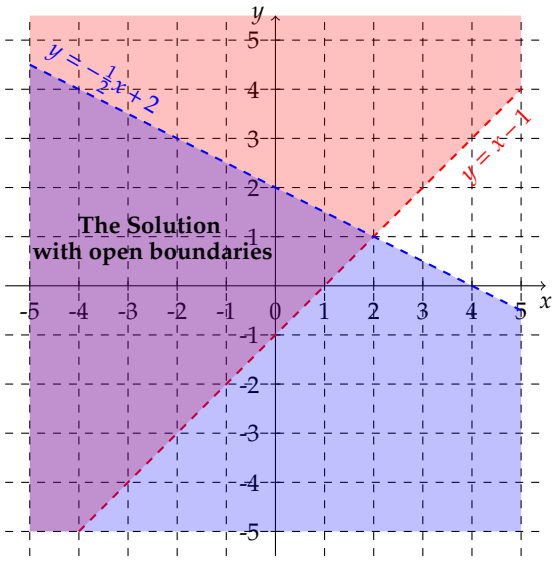


Figure 37. Unbounded Region (open sides)

Example 5.2.35. *Determine graphically the region* (x, y) *such that* $2x + 3y \leq 6$ *and* $x - y \geq 0$.

Solution After drawing the lines $2x + 3y = 6$ and $x - y = 0$, we select a test point, such as $(0, 0)$, to determine which side of each line satisfies the inequalities.

- For $2x + 3y \leq 6$: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq 6$, which is true. This means $(0, 0)$ satisfies the inequality $2x + 3y \leq 6$, so the solution for this inequality lies on the same side of the line as this point.
- For $x - y \geq 0$: $0 - 0 \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$, which is also true. This confirms that $(0, 0)$ satisfies the inequality $x - y \geq 0$, so the solution for this inequality also lies on the same side of the line as this point.

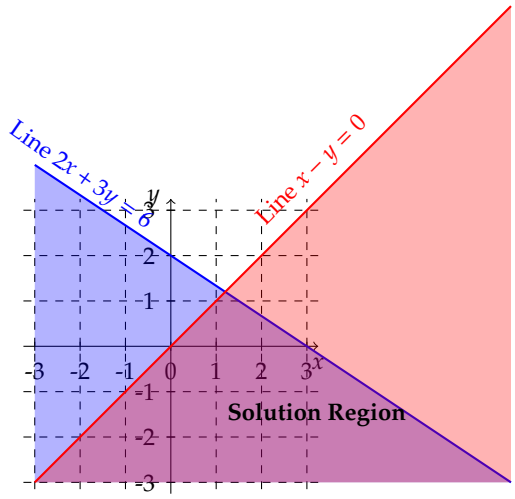


Figure 38. Solution of the inequality $2x + 3y \leq 6$ and $x - y \geq 0$.

Since both inequalities are non-strict, the solution to this system the closed overlapping region.

Question 5.2.254.

Determine graphically the region (x, y) such that

1. $2x + 3y \geq 6$ and $x - y \geq 0$.
2. $2x + 3y > 6$ and $x - y < 0$.
3. $2x + 3y \leq 6$ and $x - y \geq 0$.
4. $2x + 3y > 6$ and $x - y \leq 0$.

5. $2x + 3y = 6$ and $x - y \geq 0$.
6. $2x + 3y = 6$ and $x - y = 0$.
7. $2x + 3y = 6$ and $x - y > 0$.

Example 5.2.36. *Determine graphically the region (x, y) such that $2x + 4y > 0$ and $x - 4y \leq 5$.*

Solution After drawing the lines $2x + 4y = 0$ and $x - 4y = 5$, we select a test point, such as $(0, 0)$, to determine which side of each line satisfies the inequalities.

- For $2x + 4y > 0$: $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 > 0 \Rightarrow 0 > 0$, which is false. Therefore, $(0, 0)$ does **not** satisfy the inequality $2x + 4y > 0$. This means the solution for $2x + 4y > 0$ lies on the opposite side of the line relative to this point.
- For $x - 4y \leq 5$: $0 - 4 \cdot 0 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 5$, which is true. This confirms that $(0, 0)$ satisfies the inequality $x - 4y \leq 5$, so the solution for this inequality lies on the same side of the line as this point.

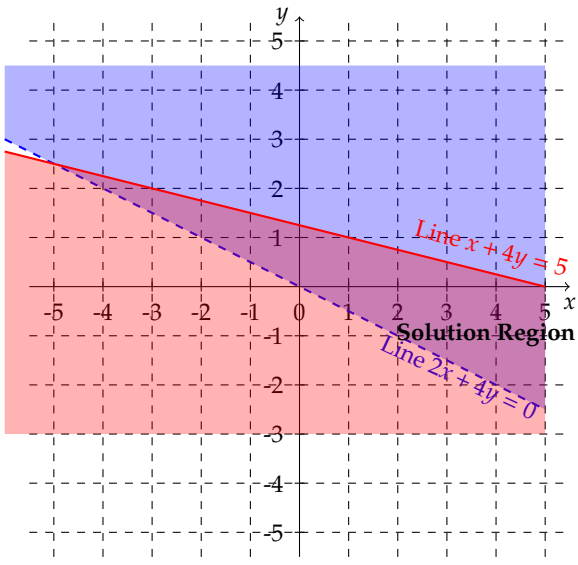


Figure 39. Solution of the system $2x + 4y > 0$ and $x - 4y \leq 5$.

Since the inequality $2x + 4y > 0$ is strict, the solution to this system excludes the boundary line $2x + 4y = 0$, making it an open region on that side. However, the inequality $x - 4y \leq 5$ is non-strict, so the solution includes the boundary line $x - 4y = 5$. The solution is an open, potentially unbounded region where the shaded areas overlap, excluding the boundary line of $2x + 4y = 0$ but including the line $x - 4y = 5$. Any point within this overlapping region satisfies both inequalities and is thus a solution.

Question 5.2.255.
Determine graphically the region (x, y) such that

1. $2x + 4y \leq 0$ and $x - 4y \leq 5$.
2. $2x + 4y < 0$ and $x - 4y \geq 5$.
3. $2x + 4y < 0$ and $x - 4y \leq 5$.
4. $2x + 4y > 0$ and $x - 4y > 5$.
5. $2x + 4y < 0$ and $x - 4y < 5$.
6. $2x + 4y > 0$ and $x - 4y = 5$.
7. $2x + 4y = 0$ and $x - 4y \leq 5$.

Example 5.2.37. *Determine graphically the region (x, y) such that $2x + 3y + 6 \leq 0$ and $4x + 6y + 10 \geq 0$.*

Solution

Consider the system of inequalities: $2x+3y+6 \leq 0$ and $4x+6y+10 \geq 0$. Simplifying the second inequality by dividing by 2, we obtain: $2x+3y+5 \geq 0$. This gives two inequalities: $2x+3y \leq -6$ and $2x+3y \geq -5$. These inequalities imply that $2x+3y$ must be both less than or equal to -6 and greater than or equal to -5, which is impossible. Therefore, the solution to the system is **empty**.

نعتبر نظام المتباينات: $2x+3y+6 \leq 0$ و $4x+6y+10 \geq 0$. بتبسيط المتباينة الثانية عن طريق القسمة على 2 نحصل على: $2x+3y+5 \geq 0$. وهذا يعطي متباينتين: $2x+3y \leq -6$ و $2x+3y \geq -5$. تشير هذه المتباينات إلى أن $2x+3y$ يجب أن يكون أقل من أو يساوي -6 وفي نفس الوقت أكبر من أو يساوي -5 ، وهو أمر مستحيل. لذلك، فإن حل هذا النظام هو **مجموعة فارغة** .

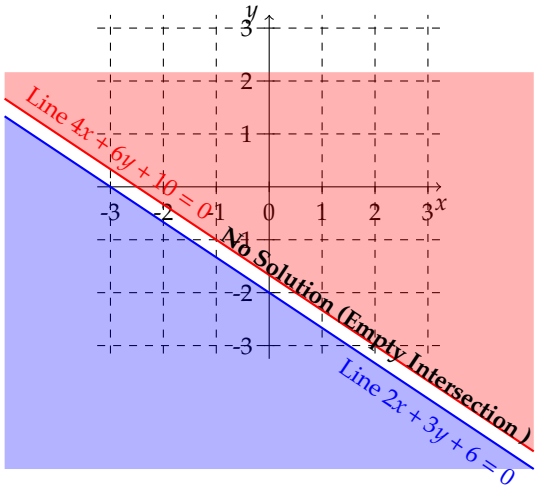


Figure 40. Solution of the system $2x+3y+6 \leq 0$ and $4x+6y+10 \geq 0$ (Empty Solution Set)

Question 5.2.256.

Determine graphically the region (x, y) such that

1. $2x+3y+6 \geq 0$ and $4x+6y+10 \geq 0$.
2. $2x+3y+6 \leq 0$ and $4x+6y+10 \leq 0$.
3. $2x+3y+6 < 0$ and $4x+6y+10 < 0$.
4. $2x+3y+6 > 0$ and $4x+6y+10 > 0$.
5. $2x+3y+6 \leq 0$ and $4x+6y+10 > 0$.
6. $2x+3y+6 > 0$ and $4x+6y+10 \leq 0$.
7. $2x+3y+6 \geq 0$ and $4x+6y+10 = 0$.

5.2.3 Exercises

Question 5.2.257.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$3x+2y > 6$
$6x+4y < 12$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (2, 0)$

Question 5.2.258.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$5x + 5y > 15$
$x + y < 3$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, -1)$

Question 5.2.259.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$4x + 6y \geq 12$
$2x + 3y < 6$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (1, 1)$

Question 5.2.260.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$7x + 14y > 28$
$x + 2y < 4$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (4, 0)$

Question 5.2.261.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$2x - y > 4$
$4x - 2y \leq 8$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, -1)$

Question 5.2.262.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$6x + 2y \geq 10$
$3x + y < 5$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (1, 1)$

Question 5.2.263.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$8x + 4y > 20$
$4x + 2y \leq 10$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, -1)$

Question 5.2.264.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$x + 3y > 9$
$2x + 6y \leq 18$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, 2)$

Question 5.2.265.

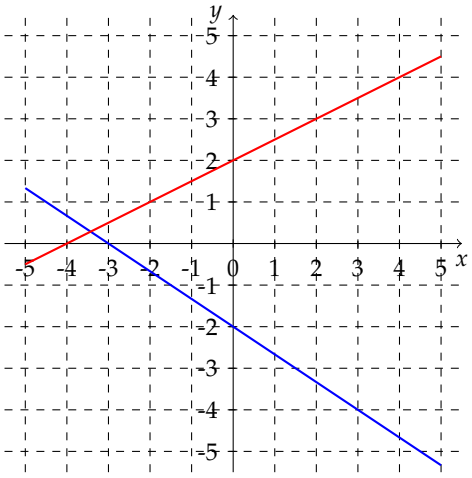
Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$3x - y > 9$
$6x - 2y \leq 18$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (3, 0)$

Question 5.2.266.

Solve the system of inequalities and determine the number of solutions:
$10x + 15y \geq 30$
$2x + 3y < 6$ A) A unique solution
B) Infinitely many solutions
C) No solution
D) $(x, y) = (5, 0)$

Question 5.2.267.

Write the equations of these lines.

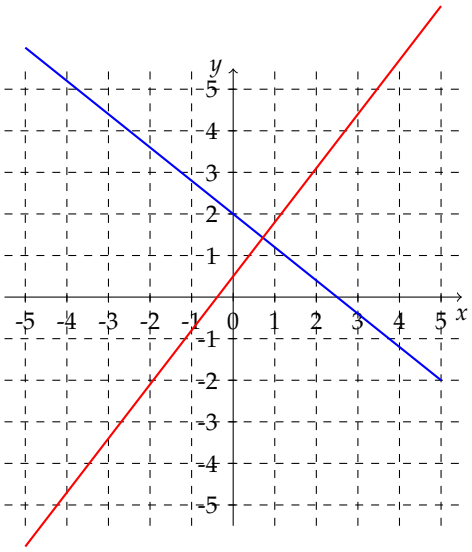


Question 5.2.268.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(0,0)$ but does not include the points $(-2,-2)$, $(-2,2)$ and $(-5,0)$.

Question 5.2.269.

Write the equations of these lines.

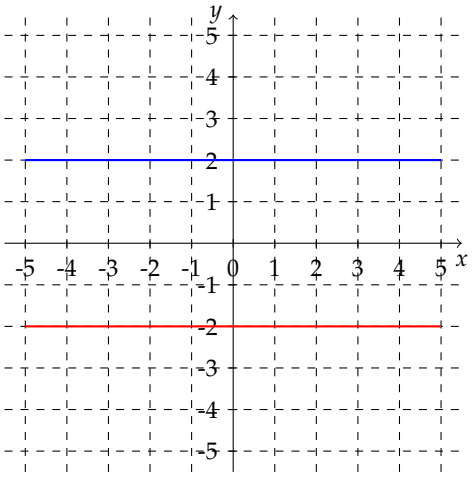


Question 5.2.270.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(0,0)$ but does not include the points $(-2,0)$, $(0,3)$ and $(3,3)$.

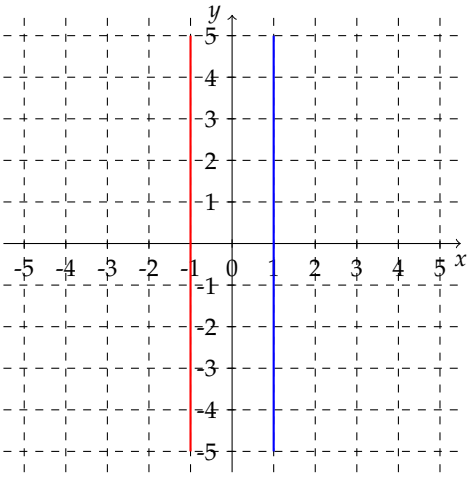
Question 5.2.271.

Write the equations of these lines.



Question 5.2.272.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(0,0)$ but does not include the points $(0,-3)$ and $(0,3)$.

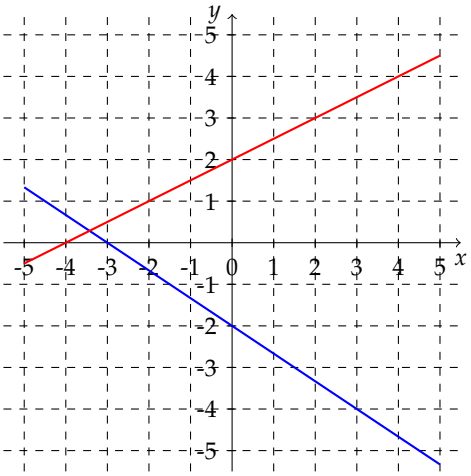


Question 5.2.273.

Write the equations of these lines.

Question 5.2.274.

Find a system of inequalities whose solution does not include the point $(0, 0)$.

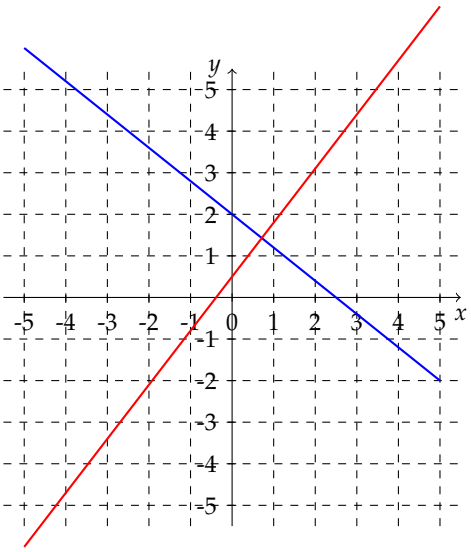


Question 5.2.275.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(-2, 2)$ but does not include the points $(0, 0)$, $(-2, -2)$ and $(-5, 0)$.

Question 5.2.276.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(-2, -2)$ but does not include the points $(0, 0)$, $(-2, 2)$ and $(-5, 0)$.



Question 5.2.277.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $(0, 3)$ but does not include the points $(-2, 0)$,$(0, 0)$ and $3, 3$.

Question 5.2.278.

Find a system of inequalities whose solution includes the point $3, 3$but does not include the points $(-2, 0)$, $(0, 3)$ and $(0, 0)$.

Chapter 6

Next Book: Functions in one variable

This next book, functions in one variable, provides a comprehensive guide to understanding and analyzing functions in one variable, covering various function types such as polynomial, rational, exponential, logarithmic, trigonometric, and more. Each section includes practical tips for identifying, graphing, and applying different types of functions and addressing specific challenges associated with each. Additional sections focus on functions commonly used in modeling and applied mathematics, including logistic and piecewise-defined functions and miscellaneous tips and tricks to aid function analysis and problem-solving.
While this table of contents represents a broad framework, the detailed content may differ in structure or depth to adapt to specific educational needs or applications. The aim is to provide a flexible, insightful resource for students, educators, and practitioners working with functions in one variable. This guide also includes a summary section with critical takeaways, practice problems, and a glossary of essential terms to support further exploration and mastery of the material.

Introduction to Functions in One Variable

- Definition of a Function in One Variable
- Domain and Range
- Graphical Interpretation and Behavior

Polynomial Functions

- Tips for Identifying Polynomial Functions
- Behavior of Polynomial Graphs
- End Behavior: Leading Term Analysis
- Finding Roots and Multiplicities
- Local Extrema and Inflection Points

Rational Functions

- Recognizing Rational Functions
- Tips on Domain Restrictions and Excluded Values
- Analyzing Vertical and Horizontal Asymptotes
- Slant Asymptotes and Holes in the Graph
- Behavior Near Asymptotes

Exponential Functions

- Understanding Exponential Growth and Decay
- Analyzing the Base of Exponential Functions
- Graphing Exponential Functions
- Tips for Applications in Real-World Problems
- Logarithmic Relationships and Conversions

Logarithmic Functions

- Properties of Logarithmic Functions
- Domain and Range of Logarithmic Functions
- Logarithmic Scale Interpretation
- Common Logarithmic Identities and Simplifications
- Solving Exponential Equations Using Logarithms

Trigonometric Functions

- Key Properties and Periodicity
- Graphing Sine, Cosine, and Tangent Functions
- Phase Shift, Amplitude, and Frequency Tips
- Identifying and Using Inverse Trigonometric Functions
- Applications of Trigonometric Functions in Modeling

Inverse Functions

- Defining and Identifying Inverse Functions
- Graphing Tips for Inverse Functions
- Relationship between Function and Its Inverse
- Finding Inverses of Common Functions
- Applications of Inverse Functions in Real-World Scenarios

Absolute Value Functions

- Understanding the Absolute Value Definition

- Graphical Analysis and Transformations
- Piecewise Representation of Absolute Value Functions
- Applications and Tips for Solving Absolute Value Equations
- Absolute Value Inequalities

Piecewise-Defined Functions

- Recognizing and Constructing Piecewise Functions
- Tips for Graphing Piecewise Functions
- Continuity and Differentiability of Piecewise Functions
- Real-World Applications of Piecewise Functions

Radical Functions

- Domain and Range Considerations for Radical Functions
- Graphing Square Root and Cube Root Functions
- Transformations of Radical Functions
- Tips for Simplifying Expressions with Radicals
- Solving Radical Equations

Power Functions

- Characteristics of Power Functions
- Odd vs. Even Powers: Symmetry and Behavior
- Graphing Tips for Power Functions
- Applications of Power Functions in Physics and Economics
- Simplifying and Manipulating Power Functions

Logistic Functions

- Understanding Logistic Growth and Saturation Points
- Graphing the Logistic Function
- Applications of the Logistic Model in Biology and Population Studies
- Tips for Solving Logistic Equations

Miscellaneous Tips and Tricks

- Quick Checks for Function Behavior (Increasing/Decreasing)
- Using Calculators and Software for Function Analysis
- Common Mistakes to Avoid in Function Analysis
- Strategies for Solving Real-World Problems Involving Functions

Summary and Review

- Key Takeaways for each Type of Function
- Practice Problems and Solutions
- Glossary of Essential Terms Related to Functions

Glossary of Terms of linear equations and inequalities

- **Equation**: A mathematical statement asserting that two expressions are equal, typically involving a variable, such as $x + 3 = 7$
  المعادلة : عبارة رياضية تؤكد أن تعبيرين متساويين، وعادةً تتضمن متغيرًا مثل $x + 3 = 7$
- **Inequality**: A mathematical expression showing that one quantity is greater than, less than, greater than or equal to, or less than or equal to another, such as $x > 5$ or $x \leq 10$
  المتباينة : تعبير رياضي يوضح أن كمية واحدة أكبر أو أقل أو أكبر أو تساوي أو أقل أو تساوي كمية أخرى، مثل $x > 5$ أو $x \leq 10$
- **Solution of an Equation**: The value(s) of the variable that make the equation true, such as $x = 4$ in $x + 3 = 7$
  حل المعادلة : قيمة المتغير أو القيم التي تجعل المعادلة صحيحة، مثل $x = 4$ في $x + 3 = 7$
- **Solution of an Inequality**: The set of values that satisfy the inequality, such as all x values greater than 3 in $x > 3$
  حل المتباينة : مجموعة القيم التي تحقق المتباينة، مثل جميع قيم x الأكبر من ٣ في $x > 3$
- **Linear Equation**: An equation of the form $ax + b = 0$, where a and b are constants and x is the variable
  المعادلة الخطية : معادلة من الشكل $ax + b = 0$ ، حيث a و b ثابتان و x هو المتغير
- **Linear Inequality**: An inequality that can be written in the form $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, or $ax + b \leq 0$, where a and b are constants
  المتباينة الخطية : متباينة يمكن كتابتها في شكل $ax + b > 0$ ، $ax + b < 0$ ، $ax + b \geq 0$ ، أو $ax + b \leq 0$ ، حيث a و b ثابتان
- **System of Linear Equations**: A set of two or more linear equations with two variables, such as $x + y = 5$ and $2x - y = 3$
  نظام المعادلات الخطية : مجموعة من معادلتين خطيتين أو أكثر مع متغيرين، مثل $x + y = 5$ و $2x - y = 3$
- **System of Linear Inequalities**: A set of two or more inequalities with two variables, such as $x + y > 5$ and $x - y \leq 3$
  نظام المتباينات الخطية : مجموعة من متباينتين خطيتين أو أكثر مع متغيرين، مثل $x + y > 5$ و $x - y \leq 3$
- **Graph of an Equation**: A visual representation of all the solutions of an equation in the coordinate plane For example, $y = 2x + 3$ is a line
  الرسم البياني للمعادلة : تمثيل بصري لجميع حلول المعادلة في المستوى الإحداثي على سبيل المثال، $y = 2x + 3$ هو خط مستقيم
- **Graph of an Inequality**: A visual representation of all the solutions of an inequality, often shown as a shaded region on one side of a boundary line
  الرسم البياني للمتباينة : تمثيل بصري لجميع حلول المتباينة، وغالبًا ما يُظهر كمنطقة مظللة على جانب من خط الحدود
- **Intersection of Solutions**: The set of points that satisfy both equations or inequalities in a system
  التقاطع بين الحلول : مجموعة النقاط التي تحقق كلا المعادلتين أو المتباينتين في النظام
- **Union of Solutions**: The set of points that satisfy at least one equation or inequality in a system
  اتحاد الحلول : مجموعة النقاط التي تحقق معادلة واحدة على الأقل أو متباينة في النظام
- **Unique Solution**: A solution that exists when a system of equations has exactly one point of intersection, such as $x = 2$ and $y = 3$

- **Consistent System**: A system of equations that has at least one solution
  نظام متسق : نظام معادلات له حل واحد على الأقل
- **Inconsistent System**: A system of equations that has no solution
  نظام غير متسق : نظام معادلات ليس له حل
- **Dependent System**: A system of equations that has infinitely many solutions, often the same line or overlapping lines
  نظام غير متسقل : نظام معادلات له عدد لا نهائي من الحلول، غالبًا ما تكون خطوط متطابقة أو متداخلة
- **Independent System**: A system of equations that has a unique solution
  نظام مستقل : نظام معادلات له حل وحيد
  الحل الفريد : حل يوجد عندما يكون لنظام المعادلات نقطة تقاطع واحدة فقط، مثل $x = 2$ و $y = 3$
- **Infinitely Many Solutions**: When a system of equations has an infinite number of solutions, usually because the equations represent the same line
  عدد لا نهائي من الحلول : عندما يكون لنظام المعادلات عدد لا نهائي من الحلول، عادةً لأن المعادلات تمثل نفس الخط
- **Empty Solution (No Solution)**: When a system of equations has no solutions because the lines are parallel and never intersect
  الحل الفارغ (لا حل) : عندما يكون لنظام المعادلات حلول فارغة بسبب أن الخطوط متوازية ولا تتقاطع

Glossary of Terms of Quadratic Equations and Inequalities

- **Quadratic Equation**: An equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, and c are constants, and $a \neq 0$.
  المعادلة التربيعية : معادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a ، b ، و c ثوابت، و $a \neq 0$.
- **Standard Form of a Quadratic Equation**: The form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, and c are constants.
  الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية : الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a ، b ، و c ثوابت.
- **Roots of a Quadratic Equation**: The values of x that satisfy the quadratic equation, often found using the quadratic formula.
  جذور المعادلة التربيعية : قيم x التي تحقق المعادلة التربيعية، ويتم إيجادها عادة باستخدام صيغة حل المعادلة التربيعية.
- **Quadratic Formula**: A formula to find the roots of a quadratic equation: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
  صيغة حل المعادلة التربيعية : صيغة لحل جذور المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- **Discriminant**: The expression $b^2 - 4ac$ in the quadratic formula. It determines the nature of the roots of the quadratic equation.
  المميز : التعبير $b^2 - 4ac$ في صيغة المعادلة التربيعية. يحدد طبيعة جذور المعادلة التربيعية.
- **Real Roots**: If the discriminant $b^2 - 4ac \geq 0$, the quadratic equation has real roots.
  جذور حقيقية : إذا كان المميز $b^2 - 4ac \geq 0$ ، فإن للمعادلة التربيعية جذور حقيقية.
- **Complex Roots**: If the discriminant $b^2 - 4ac < 0$, the quadratic equation has complex roots.
  جذور عقدية : إذا كان المميز $b^2 - 4ac < 0$ ، فإن للمعادلة التربيعية جذور عقدية.
- **Vertex**: The highest or lowest point on the graph of a quadratic function, given by the point $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
  رأس المنحنى : أعلى أو أدنى نقطة على منحنى الدالة التربيعية، ويعطى بالنقطة

intersect, representing solutions to the system.
نقاط التقاطع : النقاط التي تتقاطع فيها منحنيات المعادلات في النظام، وهي تمثل حلول النظام.

- **Number of Solutions for a Quadratic System**: A quadratic system can have zero, one, two, or infinitely many solutions depending on the relationship between the curves.
عدد الحلول لنظام تربيعي : قد يكون للنظام التربيعي صفر أو حل واحد أو حلين أو عدد لا نهائي من الحلول اعتمادًا على العلاقة بين المنحنيات.
- **Unique Solution**: When a quadratic system has exactly one point of intersection.
الحل الفريد : عندما يكون لنظام تربيعي نقطة تقاطع واحدة فقط.
- **Infinitely Many Solutions**: When a quadratic system has infinitely many solutions, typically when one equation represents the same curve as another.
عدد لا نهائي من الحلول : عندما يكون للنظام التربيعي عدد لا نهائي من الحلول، عادةً عندما تمثل معادلة واحدة نفس المنحنى كالأخرى.
- **No Solution (Empty Solution Set)**: When a quadratic system has no points of intersection.
لا حل (مجموعة حلول فارغة) : عندما يكون لنظام تربيعي لا يوجد نقاط تقاطع.

. $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

- **Axis of Symmetry**: A vertical line passing through the vertex of a parabola, given by $x = -\frac{b}{2a}$.
محور التماثل : خط عمودي يمر عبر رأس القطع المكافئ، ويعطى بالمعادلة $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Parabola**: The U-shaped graph of a quadratic function, either opening upward or downward.
القطع المكافئ : الشكل على شكل حرف او لمنحنى الدالة التربيعية، حيث يكون مفتوحًا لأعلى أو لأسفل.
- **Factoring**: A method of solving quadratic equations by expressing them as a product of binomials.
التحليل إلى عوامل : طريقة لحل المعادلات التربيعية عن طريق التعبير عنها كمنتج لمعادلتين ثنائيتين.
- **Completing the Square**: A method of solving quadratic equations by rewriting the equation as a perfect square.
إكمال المربع : طريقة لحل المعادلات التربيعية عن طريق إعادة كتابة المعادلة كمعادلة تربيعية كاملة.
- **System of Quadratic Equations**: A set of equations where at least one equation is quadratic, such as $y = x^2 + 2x + 1$ and $y = x + 3$.
نظام المعادلات التربيعية : مجموعة من المعادلات التي تكون فيها معادلة واحدة على الأقل تربيعية، مثل $y = x^2 + 2x + 1$ و $y = x + 3$.
- **Intersection Points**: The points where the graphs of equations in a system

Glossary of Terms for Polynomials

- **Polynomial**: An expression consisting of variables and coefficients, involving terms with non-negative integer exponents, such as $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$.
حدودية (متعددة الحدود) : تعبير يتكون من متغيرات ومعاملات، ويتضمن حدودًا ذات أسس صحيحة غير سالبة، مثل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$.
- **Degree of a Polynomial**: The highest exponent of the variable in a polynomial. For example, the degree of $3x^4 + x^2 - 5$ is 4.
درجة الحدودية : أعلى أس في المتغير في

- **Long Division of Polynomials**: A method for dividing one polynomial by another, similar to long division with numbers.
  القسمة المطولة للحدوديات : طريقة لقسمة حدودية على أخرى، تشبه القسمة المطولة بالأرقام.
- **Remainder Theorem**: States that the remainder of the division of a polynomial $f(x)$ by $x - c$ is $f(c)$.
  نظرية الباقي : تنص على أن باقي قسمة الحدودية $f(x)$ على $x - c$ هو $f(c)$.
- **Factor Theorem**: States that $x - c$ is a factor of $f(x)$ if and only if $f(c) = 0$.
  نظرية العوامل : تنص على أن $x - c$ عامل للحدودية $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.
- **Multiplicities of Roots**: The number of times a root is repeated in the factorization of a polynomial. For example, $x = 2$ has multiplicity 2 in $(x - 2)^2$.
  تعددية الجذور : عدد المرات التي يتكرر فيها الجذر في تحليل الحدودية. على سبيل المثال، $x = 2$ له تعددية ٢ في $(x - 2)^2$.
- **End Behavior**: The behavior of the graph of a polynomial as x approaches infinity or negative infinity, determined by the degree and leading coefficient.
  سلوك النهاية : سلوك منحنى الحدودية عندما يقترب x من اللانهاية الموجبة أو السالبة، ويتم تحديده بواسطة الدرجة والمعامل الرئيسي.
- **Turning Points**: Points on the graph of a polynomial where the direction of the graph changes. A polynomial of degree n can have up to $n - 1$ turning points.
  نقاط التحول : النقاط على منحنى الحدودية حيث يتغير اتجاه الرسم البياني. الحدودية من الدرجة n يمكن أن تحتوي على ما يصل إلى $n - 1$ من نقاط التحول.
- **Polynomial Function**: A function defined by a polynomial expression, such as $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$.
  دالة حدودية : دالة تُعرف بواسطة تعبير حدودي، مثل $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$.

حدودية. على سبيل المثال، درجة $3x^4 + x^2 - 5$ هي ٤.

- **Monomial**: A polynomial with only one term, such as $5x^3$ or -7.
  حد أحادي : حدودية تحتوي على حد واحد فقط، مثل $5x^3$ أو -7 .
- **Binomial**: A polynomial with exactly two terms, such as $x^2 + 3x$.
  حد ثنائي : حدودية تحتوي على حدين فقط، مثل $x^2 + 3x$.
- **Trinomial**: A polynomial with exactly three terms, such as $x^2 + 3x + 2$.
  حد ثلاثي : حدودية تحتوي على ثلاثة حدود، مثل $x^2 + 3x + 2$.
- **Leading Coefficient**: The coefficient of the term with the highest degree in a polynomial. In $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$, the leading coefficient is 4.
  المعامل الرئيسي : معامل الحد ذي الدرجة الأعلى في الحدودية. في $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ ، المعامل الرئيسي هو ٤.
- **Constant Term**: A term in a polynomial that has no variable, such as the c in $ax^n + \cdots + c$.
  الحد الثابت : الحد في الحدودية الذي لا يحتوي على متغير، مثل c في $ax^n + \cdots + c$.
- **Root of a Polynomial**: A value of x that makes the polynomial equal to zero, also called a solution or zero. For example, $x = 1$ is a root of $x^2 - 3x + 2 = 0$.
  جذر الحدودية : قيمة لـ x تجعل الحدودية تساوي صفرًا، ويُعرف أيضًا بالحل أو الصفر. على سبيل المثال، $x = 1$ هو جذر $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- **Factoring a Polynomial**: Writing a polynomial as a product of its factors, such as $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
  تحليل الحدودية : كتابة الحدودية كمنتج لعواملها، مثل $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
- **Synthetic Division**: A shortcut method for dividing a polynomial by a binomial of the form $x - c$.
  القسمة التركيبية : طريقة مختصرة لقسمة الحدودية على حد ثنائي من الشكل $x - c$.

Glossary: Completing the Square

- **Completing the Square**: A technique used to simplify quadratic expressions or solve quadratic equations by transforming a trinomial into a perfect square form.
  إكمال المربع : تقنية تستخدم لتبسيط التعابير التربيعية أو لحل المعادلات التربيعية عن طريق تحويل ثلاثي الحدود إلى شكل مربع كامل.

- **Perfect Square Trinomial**: An expression in the form $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, where it represents the square of a binomial.
  ثلاثي الحدود مربع كامل : تعبير على شكل $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ويمثل مربع ذو حدين.

- **Quadratic Equation**: A polynomial equation of degree two, typically written as $ax^2 + bx + c = 0$.
  معادلة تربيعية : معادلة حدودية من الدرجة الثانية، عادة تكتب بالشكل $ax^2 + bx + c = 0$.

- **Vertex Form**: The form of a quadratic function written as $f(x) = a(x-h)^2 + k$, where (h,k) represents the vertex of the parabola.
  صيغة الرأس : شكل للدالة التربيعية مكتوب على النحو $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ، حيث يمثل (h,k) رأس القطع المكافئ.

- **Standard Form**: The form $ax^2 + bx + c$ of a quadratic equation, where a, b, and c are constants.
  الصيغة القياسية : شكل معادلة تربيعية على النحو $ax^2 + bx + c$ ، حيث a ، b ، و c ثوابت.

- **Transforming to Vertex Form**: Rewriting a quadratic expression in the vertex form by completing the square to identify the vertex.
  تحويل إلى صيغة الرأس : إعادة كتابة تعبير تربيعي في صيغة الرأس عبر إكمال المربع لتحديد موقع الرأس.

- **Parabola**: The graph of a quadratic function, shaped like a "U" and either opens upward or downward.
  قطع مكافئ : رسم بياني لدالة تربيعية، بشكل أُوْ، ويتجه إما لأعلى أو لأسفل.

- **Square Root Property**: A method for solving equations of the form $(x-h)^2 = k$ by taking the square root of both sides, yielding $x - h = \pm\sqrt{k}$.
  خاصية الجذر التربيعي : طريقة لحل المعادلات من الشكل $(x-h)^2 = k$ عن طريق أخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين، ليصبح $x - h = \pm\sqrt{k}$.

- **Discriminant**: Part of the quadratic formula under the square root sign, $b^2 - 4ac$, which determines the nature and number of solutions.
  المميز : جزء من صيغة المعادلة التربيعية تحت الجذر التربيعي، $b^2 - 4ac$ ، الذي يحدد طبيعة وعدد الحلول.

- **Solving Quadratic Equations**: Using methods like factoring, completing the square, or the quadratic formula to find the values of x that satisfy the quadratic equation.
  حل المعادلات التربيعية : استخدام طرق مثل التحليل، إكمال المربع، أو صيغة المعادلة التربيعية لإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة التربيعية.

- **Axis of Symmetry**: A vertical line that passes through the vertex of the parabola, dividing it into two symmetric halves, given by $x = -\frac{b}{2a}$.
  محور التماثل : خط عمودي يمر برأس القطع المكافئ، ويقسمه إلى نصفين متماثلين، ويُعطى بالصورة $x = -\frac{b}{2a}$.

يكون المميز سالب).

- **Quadratic Formula**: The formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ used to solve any quadratic equation by calculating the roots.
  صيغة المعادلة التربيعية : الصيغة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ المستخدمة لحل أي معادلة تربيعية بحساب الجذور.
- **Factoring**: Breaking down the quadratic equation into simpler binomials if possible, as an alternative to completing the square or using the quadratic formula.
  التحليل : تفكيك المعادلة التربيعية إلى حدود ثنائية أبسط إن أمكن، كبديل لإكمال المربع أو استخدام صيغة المعادلة التربيعية.
- **Minimum/Maximum Value**: The lowest or highest point on the graph of a quadratic function, found at the vertex.
  القيمة الصغرىالعظمى : أدنى أو أعلى نقطة على الرسم البياني لدالة تربيعية، وتوجد عند الرأس.
- **Real and Complex Solutions**: Solutions to the quadratic equation, which can be real (when the discriminant is non-negative) or complex (when the discriminant is negative).
  حلول حقيقية وحلول عقدية : حلول لمعادلة تربيعية يمكن أن تكون حقيقية (عندما يكون المميز غير سالب) أو عقدية (عندما

Glossary: Conic Sections and Geometrical Shapes

- **Circle**: A set of all points in a plane that are equidistant from a given point (the center), typically represented by $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
  دائرة : مجموعة من جميع النقاط في مستوى ما تكون على مسافة متساوية من نقطة معينة (المركز)، وتمثل عادةً بالصيغة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
- **Ellipse**: A set of points where the sum of the distances from two fixed points (foci) is constant, represented by $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
  قطع ناقص : مجموعة من النقاط حيث يكون مجموع المسافات من نقطتين ثابتتين (البؤرتين) ثابتًا، ويمثل بالصيغة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
- **Parabola**: A set of points that are equidistant from a fixed point (focus) and a fixed line (directrix), represented by $y = ax^2 + bx + c$ or $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
  قطع مكافئ : مجموعة من النقاط تكون على مسافة متساوية من نقطة ثابتة (البؤرة) وخط ثابت (الدليل)، ويمثل بالصيغ $y = ax^2 + bx + c$ أو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
- **Hyperbola**: A set of points where the absolute difference of distances from two fixed points (foci) is constant, represented by $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
  قطع زائد : مجموعة من النقاط حيث يكون الفرق المطلق للمسافات من نقطتين ثابتتين (البؤرتين) ثابتًا، ويمثل بالصيغة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
- **Triangle**: A three-sided polygon with three angles, classified based on side lengths or angles (e.g., equilateral, isosceles, scalene).
  مثلث : مضلع ذو ثلاث أضلاع وثلاث زوايا، يصنف بناءً على أطوال الأضلاع أو الزوايا (مثل متساوي الأضلاع، متساوي الساقين، مختلف الأضلاع).
- **Rectangle**: A quadrilateral with four right angles and opposite sides that are equal in length.
  مستطيل : رباعي الأضلاع له أربع زوايا قائمة وأضلاع متقابلة متساوية في الطول.

- **Square**: A rectangle with four equal sides and four right angles, also considered a regular quadrilateral.
  مربع : مستطيل له أربعة أضلاع متساوية وأربع زوايا قائمة، ويعتبر أيضًا رباعي منتظم.
- **Rhombus**: A quadrilateral with four equal sides and opposite equal angles, often described as a "tilted square."
  معين (معين قائم) : رباعي الأضلاع ذو أربعة أضلاع متساوية وزوايا متقابلة متساوية، وغالبًا ما يوصف بـلْمربع المائلْ.
- **Trapezoid** (US) / **Trapezium** (UK): A quadrilateral with at least one pair of parallel sides.
  شبه منحرف : رباعي الأضلاع له على الأقل زوج واحد من الأضلاع المتوازية.
- **Polygon**: A closed figure with three or more straight sides, such as triangles, rectangles, pentagons, and hexagons.
  مضلع : شكل مغلق له ثلاثة أضلاع مستقيمة أو أكثر، مثل المثلثات والمستطيلات والخماسيات والسداسيات.
- **Pentagon**: A five-sided polygon.
  خماسي الأضلاع : مضلع ذو خمسة أضلاع.
- **Hexagon**: A six-sided polygon, commonly found in regular shapes such as honeycomb patterns.
  سداسي الأضلاع : مضلع ذو ستة أضلاع، يوجد عادةً في الأشكال المنتظمة مثل نماذج خلية النحل.
- **Octagon**: An eight-sided polygon, commonly seen in stop signs.
  ثماني الأضلاع : مضلع ذو ثمانية أضلاع، يُرى عادةً في إشارات التوقف.
- **Cylinder**: A three-dimensional shape with two parallel circular bases connected by a curved surface.
  أسطوانة : شكل ثلاثي الأبعاد ذو قاعدتين دائريتين متوازيتين متصلتين بسطح منحنٍ.
- **Cone**: A three-dimensional shape with a circular base and a single vertex, resembling an ice cream cone.
  مخروط : شكل ثلاثي الأبعاد ذو قاعدة دائرية ورأس واحد، يشبه مخروط الآيس كريم.
- **Sphere**: A perfectly round three-dimensional shape with all points on the surface equidistant from the center.
  كرة : شكل ثلاثي الأبعاد دائري تمامًا حيث تكون جميع النقاط على السطح على مسافة متساوية من المركز.